《概率论与数理统计》考试题（五）

标准答案

一、单选题

1、D　2、C　3、B　4、C　5、A　6、C　7、A　8、B　9、D　10、 A

二、填空题

1、32,　2、 P（A+B）$\geq P(A) \geq P(AB)$　3、相互独立　4、 15， 0 .4

5 、 10　6 、 $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ ，　-1　7 、 σ^2　8 、 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

9、 $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$,　10、 $1 - 0.6^4$

三、计算题

1．解：$\int_{-1}^{1} \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$　$A(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}) = 1$　A=$\dfrac{1}{\pi}$

$$P(-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$$

2．解：用 X 表示 10000 个新生儿中男孩的个数，则 X~B(n,p),
其中，n=10000,p=0.515.

要求女孩数不少于男孩个数的概率，即求 $P\{X \leq 5000\}$.由德莫佛---拉普拉斯极限定理，有 $\{X \leq 5000\} = \left\{ \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \dfrac{5000 - np}{\sqrt{npq}} \right\}$

令 $Y = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$　于是有

$$P\{X \leq 5000\} = P\left\{ Y \leq \frac{5000 - 10000 \times 0.515}{\sqrt{10000 \times 0.515 \times 0.485}} \right\} \approx \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 0.00135$$

3、解　显然，$f(x;\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2}\dfrac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ -\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$

解得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

4．解：这是一个均值未知，检验方差的问题，用 χ^2-检验法

（1） 提出统计假设 $H_0:\sigma^2 = 100^2$，H_1： $\sigma^2 \neq 100^2$

（2）选用统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，当 $H_0:\sigma^2 = 100^2$ 成立时，χ^2 服从自由度为(n-1)=15 的 χ^2-分布。

（3）在 $\alpha = 0.05$，H_1 为 $\sigma^2 \neq 100^2$ 下，拒绝域为拒绝域为 $(0,\chi^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)] \cup [\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1),+\infty)$，查表得 $\chi^2{}_{0.975}(15) = 6.262$

$\chi^2{}_{0.025}(15) = 27.488$，即拒绝域为 $(0,6.262) \cup (27.488,+\infty)$

（4）计算统计量样本观测值，因为 $\bar{x} = 235.25,\quad s = 8538.467,$

$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$=12。81，

（5） 作决策：因为 χ^2 的值未落入拒绝域，从而接受 H_0，即可以认为元件寿命的方差与 100^2 无显著差异。

四．证明：$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$