《常微分方程》试题(七)参考答案

一、(1)　变量分离得通解为 $(x^2-1)(y^2-1)=c, c\in\mathbf{R}$（ 10 分）

(2)　本题至少可以用 2 种方法求解：按恰当方程求解；分项组合。例如，分项组合得其通解为

$\sin x+\ln|y|+x/y=c$（ 10 分）。

(3)　齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$，（ 4 分）

应用常数变易法，设 $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$ 为 $y''+y=\tan x$ 的特解，

代入原方程解之得特解 $-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$（ 8 分）

于是原方程的通解为

$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$（ 10 分）

二、特征方程是 $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$,

特征根是 $\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=1\pm 2i$（ 3 分），

$\lambda_1=2$ 对应的解是 $x_1=(0,e^t,-e^t)$,

$\lambda_{2,3}=1\pm 2i$ 对应的解是

$x_2=e^t(-2\sin 2t,\cos 2t,3\cos 2t)$, $x_3=e^t(2\cos 2t,\sin 2t,3\sin 2t)$.（ 9 分）

通解是

$(x,y,z)=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3$ （ 10 分）

三、两个定理的叙述各 5 分，共 10 分.

四、原点处的线性化系统的系数矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -a\end{bmatrix}$$

对应的特征方程是 $\lambda^2+a\lambda-2=0$,（ 6 分）

所以 $(0,0)$ 是鞍点， $(0,0)$ 周围的轨线分布草图是（略）（ 10 分）

五、证明：方程 $x'+ax=f(t)$ 的一切解在 $[0,+\infty)$ 上都存在。（ 2 分）

不妨设 $t=0$ 时解 $x(t)$ 的初值为 x_0 ，此时 $x(t)=e^t(\int_0^t e^{-\xi}f(\xi)d\xi+x_0)$,（ 5 分）

先证 $\int_0^{+\infty} e^{-\xi}f(\xi)d\xi$ 收敛（用 M- 判别法证明即可）（ 7 分）

再分两种情况讨论：

（ 1 ）当且仅当 $x_0=-\int_0^{+\infty} e^{-\xi}f(\xi)d\xi$ 时 $\int_0^t e^{-\xi}f(\xi)d\xi+x_0\to 0(t\to+\infty)$,

由罗比塔法则知此时 $x(t)\to -b(t\to+\infty)$（ 12 分）

（ 2 ）当 $x_0\neq -\int_0^{+\infty} e^{-\xi}f(\xi)d\xi$ 时，显然 $\lim_{t\to+\infty}x(t)=\infty$.（ 15 分）

六、首先建立曲线 $y=f(x)$ 所满足的微分方程：

$y=xy'\pm 2\sqrt{-y'}$ 与 $y=xy'\pm 2\sqrt{y'}$（ 5 分）

分别解这两个克莱罗方程得两簇直线，其包络线 $xy=\pm 1$ 即为所求曲线.（ 10 分）

七、首先可依导数定义建立 $y=f(x)$ 所满足的微分方程 $y'=2(1+y^2)$ 与初值条件 $y(0)=0$（ 5 分）,

再分离变量可得 $f(x)=\tan 2x$.（ 10 分）