《概率论与数理统计》考试题（八）
标准答案

一、　填空题

1、1.2　　2、0.75　　3、0,　1,　　4、 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，　$X_1,\cdots,X_n$ 与 X 同分布　　5、 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　6、 $\chi^2(n)$　　7、　32　　31/32　　8、　20

9、　0.15　　10、　$p(1-p)$

二、　计算题

1、解：先求 X 的分布列，X 的所有可能取值为 0，1，2,由古典概型的概率计算公式得：$P(X=0)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$，　$P(X=1)=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$

将 $(-\infty,+\infty)$ 分为 $(-\infty,0),[0,1),[1,2),[2,+\infty)$ 四个区间得分布函数.

2、解：由分布函数可得 $P(\frac{1}{2}<X\le\frac{5}{2})=F(\frac{5}{2})-F(\frac{1}{2})=1-\frac{22}{35}=\frac{13}{35}$

当 x>1 时　$f_X(x)=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}dy=\frac{2}{x^3}$，其他 $f_X(x)=0$

当 y>1 时，　$f_Y(y)=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}dx=e^{-y+1}$, 其他 $f_Y(y)=0$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$　所以 X 与 Y 相互独立。

3、解：设至少应装 n 只。令 $X_k=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{只螺丝钉是合格品}\\ 0, & \text{第只螺丝钉是不合格品}\end{cases}$　　$k=1,2,\cdots n$

则　$n_A=\sum_{k=1}^{n}X_k$　表示装入该盒的合格螺丝钉总数，此时 $p=P(X_k=1)=0.99$,

由题意，要求　$P(n_A\ge 100)\ge 0.95$　即

$$P(n_A<100)=P\{\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{100-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi\{\frac{100-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\le 0.05$$

查表得　$\frac{100-np}{\sqrt{np(1-p)}}=-1.65$　将 p=0.99 代入解得　n=103,即应至少装 103 只螺丝钉才符合要求。

4、解：这里 n=9, $\alpha=0.05$,查 t-分布表得 $t_{0.975}(8)=2.306$

$$t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=2.306\times\frac{0.25}{\sqrt{9}}=0.192$$

所以钢珠直径的置信区间为（30.868,31.252）

5、解：（1）提出统计假设 H_0：$\mu=2$（本应设H_0：$\mu\le 2$），$H_1:\mu>2$

（2）选用统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$

因 n=400 为大样本，由中心极限定理可知，不论总体服从什么分布，Z 都非常近似地服从标准正态分布。

（3）对显著性水平$\alpha=0.02$，H_1为$\mu>2$，则拒绝域为$(z_{1-\alpha},+\infty)$，反查正态分布表得$z_{1-\alpha}$=2。05，故拒绝域为$(z_{1-\alpha,}+\infty)=(2.05,+\infty)$

（4）计算统计量的样本观测值，得

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=-3.333$$

（5）做决策：因为$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=-3.333$未落入拒绝域，应接受$H_0$，即可以认为职工平均每天用于家务劳动的时间不超过 2 小时。

三、证明： $E(S_n{}^2)=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n}[(X_i-E(X_i))-(\overline{X}-E(\overline{X}))]^2$

$$=\frac{1}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X_i)]^2-2(\overline{X}-E(\overline{X}))\cdot\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X_i)]+n[\overline{X}-E(\overline{X})]^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)-2nE[\overline{X}-E(\overline{X})]^2+nE[\overline{X}-E(\overline{X})]^2\}$$

$$=\frac{1}{n}[nD(X)-nD(\overline{X})]$$

$$=\frac{1}{n}(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$