福建师范大学闽南科技学院教案

编号：0401

<table>
<tr><td>课时安排：　　4 学时</td><td>教学课型：理论课■　　实验课□　　习题课□　　实践课□　　其它□</td></tr>
<tr><td colspan="2">题目（教学章、节或主题）：
Ch4 随机变量数字特征
§4.1 数学期望
§4.2 方差</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学目的要求（分掌握、熟悉、了解三个层次）：
1. 掌握数学期望的定义及性质
2. 掌握方差的定义及性质
3. 掌握若干重要分布的数学期望与方差
4. 熟悉一维及二维离散随机变量函数的数学期望
5. 熟悉一维连续型随机变量函数的数学期望
6. 了解二维连续型随机变量函数的数学期望</td></tr>
</table>

教学内容（注明：* 重点　　# 难点　　? 疑点）：

一、均值概念与求值

1、引例：比较算术平均值与加权平均值

2*、定义：若 x 的 $\begin{matrix}\text{分布列为}P\{X=x_i\}=p_i \\ \text{分布密度为}f(x)\end{matrix}$，记 E（X）＝ $\begin{matrix}\sum\limits_{i=1} x_i p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\end{matrix}$

称 E（X）为变量 X 的均值（加权）或数学期望或概率平均值

注：E（X）是一个可正，可负，可为 0 的数，表示 X 的“概率平均值”

例 1 设 X 分布列为

X	0	2	4
P	2/5	1/5	2/5

求 E（X）

例 2 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，试证 $E(X)=\mu$

例 3 已知 X 的分布密度 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求 E（X）

3、变量函数的均值

*# 定理 1 若 X 的 $\begin{matrix}\text{分布列为}P\{X=x_i\}=p_i \\ \text{分布密度为}f(x)\end{matrix}$，则 $Y=g(X)$ 的均值

$$E(Y)=\mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{x})]=\begin{cases}\sum_{i=1} g(x_i)p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx\end{cases}$$

定理 2 若 (X,Y) 的 $\begin{matrix}\text{分布列为P\{X=x}_i\text{,Y=y}_j\text{\}=p}_{ij} \\ \text{分布密度为f(x,y)}\end{matrix}$，则 $Z=g(X,Y)$ 的均值

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\begin{cases}\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dx\end{cases}$$

例 4 设有

X	0	2	4
P	2/5	1/5	2/5

求 $E(x^2-3)$

二、方差的概念与计算

* 1、引言：若 x 的均值为 E（X），则称 $X-E(X)$ 为 X 的偏差，$X-E(X)$ 可正可负，可为 0 的 r，v

* 2、方差定义 1：记 $D(X)=E[X-E(X)]^2$，称 D（X）为 X 的平均平方偏差，简称方差。

方差定义 2：$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$（注：此公式更多用于计算）

例 5：若有

X	8	9	10
P	0.2	0.6	0.2

求 D（X）

例 6：设 X～U[a,b],求 D（X）

*三、均值与方差性质与重要分布的特征数

1、均值与方差运算性质

$E(X)$的性质	$D(X)$的性质
$E(C)=C,E(E(X))=E(X)$	$D(C)=0,D[E(X)]=0$
$E(kX)=k\bullet E(X)$	$D(kX)=k^2D(X)$
$E(kX+b)=kE(X)+b$	$D(kX+b)$=$k^2D(X)+0$
$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$	$D(X\pm Y)\overset{\text{独立}}{=}D(X)+D(Y)$

$E(XY)\overset{独立}{=}E(X)\cdot E(Y)$	$D(XY)\overset{独立}{\geq}D(X)D(Y)$

2、重要分布的特征数

分布列或概率密度	$P_n^{(k)}=C_n^k p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ $k=0,1\ldots,n$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1\ldots,n\ldots$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<+\infty$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & 其它\end{cases}$
X □	$B(n,p)$	$P(\lambda)$	$N(\mu,\sigma^2)$	$U[a,b]$
E(X)	np	λ	μ	$\frac{a+b}{2}$
D(X)	$np(1-p)$	λ	σ^2	$\frac{(b-a)^2}{12}$

* 3、E（X）求法

1° E（X）＝ $\begin{matrix}\sum\limits_{i=1} x^2{}_i p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx\end{matrix}$

2° 当 E（X）和 D（X）已知时，有：$E(X^2)=D(X)+E^2(X)$

例 7：设 X～N[2,9]，求 $E(X^2)$

四、标准差：$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$为X的标准差

注：D(X)的单位是X单位的平方，σ(X)的单位与X单位相同

例 8：设 X 为变量，则 E（$\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$）$=0$ $D(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)})=1$

称$Y=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$为标准化了的变量

例 9：设 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{\frac{-(x+3)^2}{4}}$ ，$-\infty<x<+\infty$

则 Y＝________～$N(0,1^2)$

例 10：已知 X～B（n,p）,且 E(X)=0.1，D(X)=0.099，则 n＝___，p=____

例11：已知$X\sim P(\lambda),D(X)=3$,则$E(X)=$__________ ，$P\{X\geq 2\}=$________

例12：已知X~P(3),Y~N$(2,2^2)$,且X与Y独立

则E(2X−3Y+2)=_____，D(2X−3Y+2)=_____

例13：已知X~N(1,9),则f(x)=_______

例14：若$n=100,p=0.002$,则$B(n,p)\overset{\text{近似}}{\sim}P(_)$

例15：若$n=1000,p=0.002$,则$B(n,p)\overset{\text{近似}}{\sim}N(_,_)$

例16：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$Y=2X+3\sim N(_,_)$，$E(Y)=$_____

例17：若X_1,X_2独立，X～N$(\mu,\sigma^2),X_2\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$

则$Y=X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

教学方式、手段、媒介：

板书设计：

定义，定理，性质等一些概念性的内容	图形，例题，习题的演算

讨论、思考题、作业：

1、作业：习题 4、1，2，5，6，8

2、思考：设正方形边长 X～U[0，2]，求正方形面积的平均值

参考书目：

1．《概率论》，复旦大学编，北京：高等教育出版社，1979。

2．《概率论与数理统计》，浙江大学数学系高等数学教研组编，人民教育出版社，1979。

3．《概率论与数理统计》，王松桂，程维虎，高旅端编，北京：科学出版社，2000

教师姓名：傅金波　　　职称：讲师　　年　　月　　日