第一章　事件与概率

§1.1　随机现象与随机试验

一、随机试验与样本空间

在自然界里，在生产实践和科学实验中，人们观察到的现象大体可归结为两种类型.一类是可事先预知其结果的，即在准确地重复某些条件时，它的结果总是肯定的；或是根据它过去的状态，在相同的条件下完全可以预言将来的发展.我们把这一类现象称之为确定性现象或必然现象.例如在没有外力作用的条件下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动.又如在一个标准大气压下，水加热到 100℃时必然会沸腾等等. 但人们逐渐发现还有另一类型的现象存在，它是事先不可预言的，即在相同的条件下，未来的发展事前却不能完全肯定，这一类型的现象我们称之为随机现象. 例如抛掷一枚匀质硬币，结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；新生的婴儿可能是男孩或女孩；炮弹的落点位置等等……，现实生活中这样的例子举不胜举.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

在概率论中，我们把实现一组条件称为一次试验，记为 E.

若某试验 E 满足：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验的所有可能的结果是明确可知的，且不止一个；

（3）每次试验仅能有一个结果出现，但试验前无法预知.

则称 E 为一个随机试验.

下面举几个这方面的例子.

E_1：掷两枚匀质硬币，用 H 表示出反面，T 表示出正面，则该试验的所有结果为

(H,H)，(H,T)，(T,H)，(T,T).

E_2：记录电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数，则所有可能的结果为

0，1，2，…，n，….

E_3：记录炮弹的落点位置，设要命中的目标坐标为 (x_0, y_0)，则炮弹的实际落点范围为　$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2\}$.

E_4：10 件产品中有 3 件是次品，从中一件接一件地选取（已选出的不放回），直到取出第三件次品为止，检点从这批产品中取出的产品的总数.则其所有可能的结果为：3，4，5，6，7，8，9，10.

今后所提到的试验，如无特别说明都指随机试验.进行一个试验总有一个需要观察的目的，根据这个目的，试验被观察到有多种不同的可能结果.

我们把随机现象的表现，也就是随机试验的结果称为事件.例如，在试验 E_1 中，“两枚硬币反面都朝上”，即 (H,H) 是一个事件，而“两枚硬币至少有一枚正面朝上”也是一

个事件，即{ (H,T)，(T,H)，(T,T) }，很显然，这一结果可以划分为(H,T)，(T,H)，(T,T)三种结果..

我们把在一定条件下不可能再分的结果，称为基本事件.今后我们用e_i（$i=1,2,3,\cdots$）来表示基本事件.在一个试验 E 中，基本事件是最小单元，事件均由基本事件构成.例如，掷一枚均匀的骰子，其基本事件有$e_1=1,\cdots,e_6=6$

在每次随机试验中一定会出现的事件称为必然事件，在任何一次试验中都不会出现的事件称为不可能事件.而把可能出现，也可能不出现的事件称为随机事件.例如，两次射击“至多命中目标两次”是必然事件，而“命中目标三次”是不可能事件，“第一次命中”就是一个随机事件.

今后，我们用Ω表示必然事件，用ϕ 表示不可能事件.为了便于研究，我们将随机试验E的所有可能的结果组成的集合E称为试验E的样本空间，记为Ω.Ω的元素亦即试验 E 的基本事件，称为样本点.即$\Omega=\{e_1,e_2,\cdots\}$.

二、事件之间的关系与运算

在概率论中，当涉及随机试验的时候，实际上并不关心它在技术上的特点，而只关心在此试验中可能观察到那些事件，以及在每一次试验中究竟出现了什么事件.这样，与一个随机试验相联系的是一个事件的集合.为以后研究的需要，我们在此事件的集合中，定义事件之间的各种关系及运算.而注意到事件的表示与集合论中集合的表示完全平行，所以我们比照集合论中集合的关系来讨论事件的关系.

定义 1.1 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 为记为$A\subset B$.

显然，对任意事件A，都有$A\subset\Omega$；此外，我们规定，$\phi\subset A$.

定义 1.2 对事件A与B，若$A\subset B$，且$B\subset A$，则称A与B相等，记为$A=B$.

定义 1.3 事件A与B中至少有一个发生而组成的新事件 称为A与 的和（或并）事件.即$C=A+B$（或$C=A\bigcup B$）.

例如，在掷一枚骰子的试验中，记A为“出现偶数点”，即$A=\{e_2,e_4,e_6\}$，记C表示“出现的点数能被 3 整除”，$C=\{e_3,e_6\}$，则$A+C$表示“出现点数为 2，3，4 或 6”，记为$A+C=\{e_2,e_3,e_4,e_6\}$.显然对于任意事件 A，有$A\bigcup\phi=A$，$A\bigcup\Omega=\Omega$.此外，若$A\subset B$，则$A\bigcup B=B$.

定义 1.4 由事件A与B同时发生而组成的新事件C称为A与B的积（交）事件，记为$C=AB$（或$C=A\bigcap B$）.

例如掷骰子的试验中，记A为“出现偶数点”，即$A=\{e_2,e_4,e_6\}$，记B为“出现奇数

点”，即 $B=\{e_1,e_3,e_5\}$，则 $A\bigcap B=\phi$，$A\bigcap C=\{e_6\}$，$B\bigcap C=\{e_3\}$.显然对于任意事件 A，有 $A\bigcap\phi=\phi$，$A\bigcup\phi=A$.此外，若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$.

定义 1.5 若事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B 互不相容（或称 A 与 B 互斥），记为 $AB=\phi$.

例如在上述掷骰子的试验中，事件 A 与 B 就是互不相容的一对事件.

定义 1.6 如果事件 A 发生，则事件 B 一定不发生，且在一次试验中两者必发生其一，则称 B 为 A 的逆事件，记为 $\overline{A}=B$.

显然，若 B 为 A 的逆事件，则 A 也是 B 的逆事件，此时，我们称事件 A 与事件 B 互为对立事件.将定义 1.6 用数学语言表示，即是

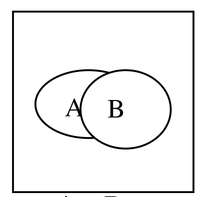
对事件 A，B，若 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\phi$，则 $\overline{A}=B$.

在上述掷骰子的试验中，事件 A 与 B 就是对立事件.

定义 1.7 由事件 A 发生但事件 B 不发生而组成的新事件 C 称为 A 与 B 的差事件，记为 $C=A-B$.

由差事件的定义可知 $A-B$ 就是既要求 A 发生，同时又要求 B 不发生，所以，我们有 $A-B=A\overline{B}$，同时由 Venn 图可以看出 $A-B$ 又等于 $A-AB$，所以差事件有下列等价表示：

$$A-B=A\overline{B}=A-AB$$



$A-B$

图 1.1

和集合论完全平行地，我们下面给出事件的运算律

1、交换律　$A+B=B+A$　　$AB=BA$

2、结合律　$A+(B+C)=(A+B)+C$

3、分配律　$A(B+C)=AB+AC$

4、De.Morgen 律 （对偶律）　$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

这些性质的证明都很简单，作为例子，我们证明 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.事实上，由于事件 $A+B$ 表示事件“A 与 B 至少出现一个”，所以如果它的对立事件 $\overline{A+B}$ 出现，则 A 与 B 都不出现，即出现事件 $\overline{A}\,\overline{B}$，这样 $\overline{A+B}\subset\overline{A}\,\overline{B}$.反过来，由于事件 $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示 A 与 B 都不出现，所以若 $\overline{A}\,\overline{B}$ 出现，则 $A+B$ 的对立事件 $\overline{A+B}$ 必出现，从而 $\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{A+B}$.于是 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

从以上的讨论和表示我们发现，事件间的关系及运算与集合论中集合的关系和运算是完全相似的，而且这种相似在建立概率论的严格数学基础时非常重要.不过，我们应该注意另一点，就是要学会用概率论的语言来解释这些关系及运算.并且会用这些运算关系来表示

一些事件.

[例 1]　设 A, B, C 为三个事件，则

（1）A, B 发生但 C 不发生可以表示为：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

（2）A, B, C 恰有两个发生可以表示为：$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

（3）A, B, C 至少有两个发生可表示为：$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$

（4）A, B, C 至少有一个发生可以表示为：$A+B+C$

或 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$

§1.2　概率的定义

随机事件在一次试验中虽然可能出现，也可能不出现，但是，按问题的性质或在大量重复试验中，可以发现：它出现可能性的大小是能计量的.随机事件的概率就是用来描述随机事件出现的可能性大小的一个数值.概率是概率论中最基本的概念之一，需要从不同的角度去描述它.本节我们讨论概率的定义，并由此推导出随机事件概率的一些常用性质.

一、概率的统计定义

概率的统计定义，就是从寻求事件发生可能性大小的统计规律的意义下，以频率描述概率.为此，我们首先引入频率，它描述事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的度量——概率.

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数.比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，并记为 $f_n(A)$.

显然，频率具有下列基本性质：

1）$f_n(A)\geq 0$；（非负性）

2）$f_n(\Omega)=1$；（规范性）

3）若事件 A, B 互不相容，则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$　（可加性）

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其数值大小表示 A 发生的频繁程度.频率愈大，事件 A 发生愈频繁，这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大.因而，直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小 .抛掷一枚匀质硬币,当抛掷次数很少时，比如说每组只抛掷 5 次，连续抛掷 10 组，我们会发现，正面朝上这一事件的频率的取值具有很大的随意性，在 0 到 1 随机取值；但如果抛掷 100 次，500 次，1000 次，我们会发现频率的取值将会呈现出一定的规律性.历史上有众多的概率论的学者都作过“反复抛掷一枚匀质硬币，记录正面朝上的次数”的试验，如表 1

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出，（1）频率有随机波动性，即对于同样的n，所得$f_n(H)$不尽相同；（2）抛掷硬币次数n较小时，频率$f_n(H)$随机波动的幅度较大，但随着n增大，频率$f_n(H)$呈现出一种稳定性.即当n逐渐增大时$f_n(H)$总是在0.5附近摆动,而逐渐稳定于0.5.我们把这种现象称为频率的稳定性.

由随机试验中事件发生的频率的稳定性可见事件概率的存在性,因为频率与概率都是刻划随机事件发生可能性大小的一种度量，由此，我们给出概率的统计定义.

定义 1.8 在一定条件下，当试验次数增多，事件 A 出现的频率将稳定在某一个数值p上，则称p为事件 A 发生的概率，记为$P(A)$.

由频率的基本性质，可得到概率也具有下列基本性质

1）$P(A)\geq 0$；（非负性）

2）$P(\Omega)=1$；（规范性）

3）若事件A, B互不相容，则$P(A+B)=P(A)+P(B)$ （概率的特殊加法公式）

二、概率的古典定义

概率论在发展初期的主要研究对象是古典概型.所谓古典概型，是指一种具有有限可加性和等可能性的概率模型.

一个试验若满足：1）仅有有限个结果；2）每个基本事件出现的可能性都相同，则称此概型为古典概型.

亦即 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots e_n\}$， $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$.

定义 1.9 设试验共有n个基本事件，事件A有k个基本事件（有利场合数）,则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年把上式作为概率的一般定义.现在通常称它为概率的古典定义，因为它只适用于古典概型场合.

这里，等可能性是一种假设.在实际应用中，我们需要根据实际情况去判断是否可以认为各基本事件是等可能的.实际上，在很多场合由对称性（如掷硬币试验、掷骰子试验）或某种均衡性（如取球试验）不难判断基本事件的等可能性，并且在此基础上计算各种事件的概率.

[例 1] 一口袋中装有 6 只球，其中 4 只白球，2 只红球，从中有放回地抽取两次，每次随机取出一球，求(1)取到的两球都是白球的概率；（2）取到的两球颜色相同的概率.

解：以 A, B 分别表示“取到的两球都是白球”、“取到的两球都是红球”.易知“取到的两球颜色相同”这一事件即为 $A+B$.

从袋中依次取两只球，每一种取法为一个基本事件，显然这时样本空间中仅包含有限个元素.且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，因而可用古典概型的概率公式来计算相关概率.

第一次从袋中取球有 6 只球可供选取，第二次也有 6 只球可供选取，所以接连两次抽取共有 6×6 种取法，即样本空间中元素总数为 6×6.对于事件 A 而言，由于第一次有 4 只白球可供选取，第二次也有 4 只白球可供选取，所以，两次都取到白球的取法有 4×4 种，即 A 包含有 4×4 个元素.同理，B 中包含 2×2 个元素.于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$$

$$P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}$$

注意到事件 A 与 B 互不相容，所以，取到的两球颜色相同的概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}$$

[例 2]掷两枚骰子，求出现的点数之和为 7 的概率.

解：以 A 表示“出现的点数之和为 7”，掷两枚骰子，所有可能的结果有 36 种，而只有 6 种可能的结果满足数字之和等于 7，即(1,6),(2,5),(3,4), (4,3),(5,2),(6,1)，所以

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

这里所给出的例子，概率的计算比较容易.但并不是所有古典概型的概率计算都这么容易.事实上，古典概型中概率的计算相当困难而且富含技巧，计算的要点是给定样本点，并计算它的总数，再计算有利场合的数目.而在考虑稍微复杂一点的情形就会懂得，必须要有某些系统性的计算或计数的方法，这个工具就是排列和组合.所以，下面对排列和组合的知识作一个简单回顾.

全部排列与组合公式的推导基于下列两条原理：乘法原理和加法原理.

乘法原理：完成某一项工作需要相继进行的 n 个步骤来完成，完成第 i 个步骤有 m_i 种方法，则完成该项工作总的方法数为 $\prod_{i=1}^{n} m_i$.

加法原理：完成某项工作共有 n 种途径，第 i 种途径包含 m_i 种方法，则完成该项工作总的方法数为 $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

由上述原理可以导出排列与组合公式.

基于乘法原理，所谓排列，是从共有 n 个元素的总体中取出 r 个来进行有顺序的放置（其中又可分为有放回的选取和无放回的选取）.

在有放回的条件下，总方法数为 $n\cdot n\cdots n=n^r$

无放回的条件下，总方法数为 $n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ 记为 P_n^r.

显然，$P_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

对于有 n 个 m 类本质不同的元素，每类分别有 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 个元素

（$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$）,则 n 个元素全取出的排列数为 $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$.

基于加法原理，所谓组合，仅是从共有 n 个元素的总体中取出 r 个.其方法数记为 C_n^r.

对上述排列，若先不考虑顺序从 n 个元素中任选 r 个（A_1）,然后再对 r 个元素进行有顺序的放置（A_2）,则 A_1 是从 n 个元素选 r 的组合数，而 A_2 是 r 个元素的全排列，由乘法原理

$$P_n^r=C_n^r\cdot r!=\frac{n!}{(n-r)!}$$

所以 $$C_n^r=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

[例 3] 袋中装有红、黄、白色球各一个，有放回的依此取三个球，记 A 表示“三个都是红球”，B 表示“全为红球或全为黄球”，C 表示“颜色全不同”，D 表示“无黄色球”，. 试求 A,B,C,D 的概率.

解: 按照抽取规则，有放回的依此取三个球，样本空间所包含的基本事件个数为 3^3=27，所以

$$P(A)=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

$$P(B)=\frac{2}{3^3}=\frac{2}{27}$$

$$P(C)=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{3^3}=\frac{2}{9}$$

$$P(D)=\frac{C_2^1C_2^1C_2^1}{3^3}=\frac{8}{27}$$

[例 4] 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求取得 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率.

解: 记 $A=$“取到的 4 只中至少有 2 只配成一双”

将 10 只鞋编号，其中第一双为 1，2 号，第二双为 3，4 号，…，第五双 9，10 号.从中任取 4 只，有 C_{10}^4 种不同取法.取得 4 只鞋子至少有 2 只配成一双，即恰有 2 只配成一双或 4 只配成两双，有 $C_5^1C_4^2(C_2^1)^2+C_5^2$ 种取法，所

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2(C_2^1)^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

[例 5]随机地将 15 名新生平均分配到三个班中，这 15 名新生中有三名优秀生，求

（1） 每个班各分一名优秀生的概率；（2）三名优秀生在同一个班的概率.

解：记 A 表示“每个班各分一名优秀生”，B 表示“三名优秀生在同一个班”.

基本事件总数为 $\frac{15!}{5!5!5!}$

（1）每个班各分一名优秀生有 $3!$ 种，对每一种分法，12 名非优秀生平均分配到三个班中分法总数为 $\frac{12!}{4!4!4!}$ 种，所以共有 $\frac{3!12!}{4!4!4!}$ 种分法，所以

$$P(A)=\frac{\frac{3!12!}{4!4!4!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{25}{91}$$

（2）三名优秀生在同一个班，分法有 3 种，对每一分法，12 名非优秀生分配到三个班中分法总数为 $\frac{12!}{2!5!5!}$，共有 $\frac{3\times12!}{2!5!5!}$ 种，所以

$$P(B)=\frac{\frac{3\times12!}{2!5!5!}}{\frac{15!}{5!5!5!}}=\frac{6}{91}$$

三、概率的几何定义

古典概型是在满足有限性和等可能性的前提下应用的.但有的随机现象不具有有限性的条件，如在一条直线上落点的分布，在一个平面上落点的分布等就不具备有限性.几何概率给出了在无限情形下事件概率的确定方法.

若一个试验具有下列特征：1）每次试验的结果是无限多个，且全体结果可以用一个有度量的几何区域来表示；2）每次试验的各种结果出现是等可能的，则称此概型为几何概型.

定义 1.10 几何概型的样本空间为有度量的区域，记为 Ω，Ω 的度量为 S_Ω，事件 A（$A\subset\Omega$）所对应的区域记为 A，A 的度量记为 S_A，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$$

由上式确定的概率称为几何概率.

对于一个具体问题，能否计算几何概率，关键在于将具体问题“几何化”，即根据问题的

具体情况，选取合适的参数，建立适当的坐标系，将试验的每一个结果与坐标系中的一个点对应，从而全体结果构成一个具有等可能要求的区域，这里“等可能”的含义是指：每一个试验结果的点落入某区域内可能性大小仅与该区域的度量成正比，而与该区域的位置无关.

[例 6] （会面问题）两人约定在 0 到T时内到某地会面，先到者等$t(t \le T)$小时后离去，求两人能会面的概率.设每个人在 0 时到T时内各时刻到达该地的可能性相等，且两人到达该地的时刻互不影响.

解 以x, y分别表示两人到达该地的时间,则 $0 \le x \le T,\ 0 \le y \le T$,在xoy平面上,坐标(x, y)满足上式的点的全体所构成的正方形 就是样本空间 .两人能会面的充要条件为

$|x-y| \le t$ 满足该条件的点决定了Ω的一个子集A，则

$$P(A)=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-(1-\frac{t}{T})^2$$

图 1.2

[例 7]将长为a的细棒任意折成三段，求它们能构成三角形的概率.

解：将细棒折成三段，长分别为$x, y, a-x-y$，则样本空间Ω所占的区域为

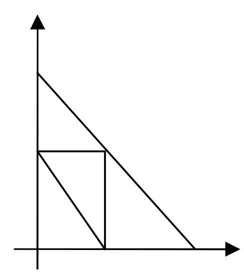


图 1.3

$$\begin{cases} 0 < x+y < a \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

所构成的图形如图 1.3

面积$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}a^2$.

三段能构成三角形则任意两段之和大于第三段，即应满足

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 < y < \frac{a}{2} \\ x+y > a-(x+y) \end{cases}$$

它们构成三角形DCE，其图形面积为

$$S_{\Delta DCE}=\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2$$

所以，将长为a的细棒任意折成三段，它们能构成三角形的概率为

$$p=\frac{\frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}$$

四、概率的公理化定义

前面介绍的概率的古典定义及几何定义都带有局限性，因为它们都是以等可能性为基础的，而实际问题中遇到的情况还有许多是没有这种等可能性的.概率的统计定义虽然一般而且直观，但是在数学上不严密，因为那里的依据是“试验次数很大时，频率所呈现的稳定性”这一事实，即当试验次数不多时，频率的取值具有很大的随意性，当实验次数比较大时，频率的取值将会在一个数值附近摆动；而对这种“摆动”如何理解却没有确切规定.因而，在作为数学的一个重要分支的概率论中，有必要象在数学的其它分支中一样，提出关于随机事件概率的公理，使以后有关的推理有所依据.为此，我们先引进代数和σ-代数的概念.

定义 1.11 设Ω是样本空间，F是由Ω的一些子集构成的集合族，如果F满足如下条件：

（1）$\Omega\in F$；

(2) 若$A\in F$，则$\overline{A}\in F$；

（3）若$A_i\in F$（$i=1,2,\cdots,n$），则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in F$；

则称F为一事件体，或称代数，F中的元素称为事件.

定义 1.12 如F除了满足上述（1），2()外，还满足

(3)′ 若$A_i\in F$（$i=1,2,\cdots$），则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F$，

则称F为σ-代数.

由定义 1.12 易知：$\phi\in F$，同时，若$A_i\in F$（$i=1,2,\cdots,$），则$\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in F$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in F$；

可以验证，对任意样本空间Ω，它的所有子集所成的集合族就是一个σ-代数.

由于对于有限样本空间Ω而言，若F是Ω的子集组成的代数，则必为σ-代数.因此今后我们只讨论σ-代数，而不单独谈代数.抽取具体对象，我们把任一样本空间Ω，以及由Ω的组成的一个σ-代数F写在一起，记为（Ω,F），称为具有σ-代数结构的样本空间，或简称为可测空间.特别对有限样本空间，则称为有限可测空间.

对于一个可测空间，定义概率如下：

定义 1.13 设（Ω,F）是可测空间，对于任意$A\in F$，定义实值集函数$P(A)$，它满足如下三个条件

（1）任意$A\in F$，有$0\le P(A)\le 1$；

（2）对必然事件Ω，有$P(\Omega)=1$；

（3） 完全可加性）对任意$A_i\in F$（$i=1,2,\cdots$），$A_i\bigcap A_j=\phi$（$i\ne j$），恒有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称实值集函数P为（Ω, F）上的概率，$P(A)$就称为事件A的概率.

这样，无论对古典概率、统计概率还是几何概率，它们都满足定义6，因此，根据这一公理化结构所推出的任何规律，对它们都是适用的.

设Ω是一样本空间，F是Ω中的一个σ-代数，P为F上的概率.我们称具有上述结构的样本空间为概率空间，记为(Ω, F, P).

§3　概率的性质

在上一节中，我们得到了概率得三条基本性质

（1）　$P(A) \geq 0$.

(2)　$P(\Omega) = 1$.

(3)　若A，B互不相容，则有　$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

事实上，在概率的三条公理的基础上，可以推导出许多概率的性质.

(4)　设A为任一随机事件，则$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证:由于A与$\overline{A}$互不相容，所以由（3）　$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

又由于　$A + \overline{A} = \Omega$，　而$P(\Omega) = 1$

所以　$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

故　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

（5）　设$A \subset B$，则　$P(B-A) = P(B) - P(A)$

证：当$A \subset B$时，$B = A + (B-A)$

由性质（3）　$P(B) = P(A) + P(B-A)$

从而　$P(B-A) = P(B) - P(A)$.

由性质（5）易得

当$A \subset B$时，$P(A) \leq P(B)$

对任意事件A、B，$P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

（6） 设A、B为任意两个随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证：先把$A+B$表示成两个互斥事件A与$B-AB$的和，即

$$A+B=A+(B-AB)$$

由性质（3）得

$$P(A+B)=P[A+(B-AB)]=P(A)+P(B-AB)$$

又由于$AB\subset B$，所以，$P(B-A)=P(B)-P(AB)$

故 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

有性质（6）易得

对任意事件A、B，$P(A+B)\le P(A)+P(B)$

对任意事件A、B、C，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

（7） 设随机事件序列$A_1,A_2,\cdots,$是单调的，那么

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

把这条性质称为概率的连续性.

证：1）先设序列$A_1,A_2,\cdots$为单调不减的，即

$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1+(A_2-A_1)+(A_3-A_2)+\cdots$

由完全可加性 $P(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=P(A_1)+P(A_2-A_1)+P(A_3-A_2)+\cdots$

又由性质（5） $P(A_{n+1}-A_n)=P(A_{n+1})-P(A_n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$

所以
$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(A_1)+[P(A_2)-P(A_1)]+[P(A_3)-P(A_2)]+\cdots$$
$$=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

2）再设序列$A_1,A_2,\cdots$为单调不增的，即

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$$

则 $A_1-A_1,A_1-A_2,A_1-A_3,\cdots$是单调不减的，由 1），得

$$P(\lim_{n\to\infty}(A_1 - A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_1 - A_n)$$

而 $$\lim_{n\to\infty}(A_1 - A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \overline{A}_n)$$

$$= A_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n) = A_1(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n})$$

$$= A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \lim_{n\to\infty} A_n$$

所以 $$P(\lim_{n\to\infty}(A_1 - A_n)) = P(A_1 - \lim_{n\to\infty} A_n)$$

由于 $A_n \subset A_1$，$\lim_{n\to\infty} A_n \subset A_1$

由性质（5） $$P(A_1 - \lim_{n\to\infty} A_n) = P(A_1) - P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

$$P(A_1 - A_n) = P(A_1) - P(A_n)$$

故 $$P(A_1) - P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}[P(A_1) - P(A_n)$$

$$= P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

从而 $$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

下面通过举例来说明概率性质的应用.

[例 1] 袋中装有 4 只黑球和 1 只白球，每次从袋中随机取出一球，并换入一只黑球，连续进行，问第三次摸到黑球的概率为多少？

解：记 A 表示“第三次摸到黑球”，注意到每次换入的都是黑球，所以第三次摸到黑球这一事件有多种可能的结果，而如果考虑 A 的对立面，该问题将变得极为简单.

显然，$\overline{A}$ 表示“第三次摸到白球”

$$P(\overline{A}) = \frac{C_4^1 C_4^1 C_1^1}{5^3} = \frac{16}{125}$$

故 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{16}{125}$

在不同的问题中，有的求 $P(A)$ 较容易，而求 $P(\overline{A})$ 较困难；有的正好相反，利用公式 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$，我们就可以先求容易的一个，再去求另一个.

[例 2] 设事件 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{4}$，求在下列三种情况下 $A - B$ 的概率.

（1）A 与 B 互斥；

（2）$B \subset A$；

（3） $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解：（1）因为 A 与 B 互斥，所以 $A\subset\overline{B}$ ，从而 $A\overline{B}=A$

故 $$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)=\frac{1}{2}$$

（2）当 $B\subset A$ 时，

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

（3） $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

[**例 3**] 从 1 至 9 这 9 个数字中，有放回地取三次，每次任取一个，求所取的三个数之积能被 10 整除的概率.

解法 1：设 A_1 表示“所取的三个数字中含有数字 5”的事件， A_2 表示“所取的三个数字中有偶数”的事件，则 $A=A_1A_2$，所以

$$\begin{aligned}P(A)=P(A_1A_2)&=1-P(\overline{A_1A_2})\\&=1-P(\overline{A_1}+\overline{A_2})\\&=1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=1-(\frac{8}{9})^3-(\frac{5}{9})^3+(\frac{4}{9})^3\\&=1-0.786\\&=0.214\end{aligned}$$

该例说明，对某些复杂的复合事件的概率计算问题，可以利用事件运算的对偶律，使问题简化.

§4 全概率公式与 Bayes 公式

一、条件概率及乘法公式

先看一个例子.

[**例 1**] 某玩具厂有职工 500 人，男女各半，男女职工中非熟练工人分别有 40 人与 10 人，现从该厂中任选一名职工，试求（1）该职工为非熟练工人的概率；（2）若已知选出的是女职工，求她是非熟练工人的概率.

解:（1）记 A 为“抽到非熟练工人”，易得 $P(A)=\frac{50}{500}=\frac{1}{10}$

（2）和（1）相比，增加了一个附加的信息，即已知选出的是女职工，记“选出女职工”为事件 B，则（2）可以叙述为，“在已知事件 B 发生的条件下，求事件 A 发生的概率”，这类带有已知条件的概率问题就是条件概率，记为 $P(A\mid B)$.

条件概率还是一种概率，因此事实上仍可以按照古典概型的一般定义来考虑求解的方法，但问题是，所附加的条件对古典概型的分子项和分母项各将产生什么影响.

既然已知选出的是女职工，那么男职工就可以排除在考虑范围之外，因此“B发生条件下的事件A”，就相当于在全部女职工中任选一人，并选出了非熟练工人.从而，样本点总数就相当于全部女职工人数，而上述事件中所包含的样本点总数（有利场合数）就应是女职工中的非熟练工人，所以

$$P(A \mid B)=\frac{10}{250}$$

可见附加信息对分子项和分母项都产生了影响，为了导出一般的计算公式，我们将分子，分母同除以全部样本点个数，得

$$P(A \mid B)=\frac{10}{250}=\frac{\frac{10}{500}}{\frac{250}{500}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

由此，我们可以得到条件概率的一般定义：

定义 1.14 设A,B是两个随机事件，且$P(B)>0$，称

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.4.1}$$

为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率.

不难验证，条件概率符合概率定义中的三个条件，即

（1） 对于每一事件A，有$P(A \mid B)\geq 0$；

（2） $P(\Omega \mid B)=1$；

（3）设$A_1,A_2,\cdots$是一列两两不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \mid B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i \mid B)$$

由于条件概率符合概率的三条基本性质，所以上一节中所讨论的相关性质都适用于条件概率.

[**例 2**] 某种机器按设计要求使用寿命超过 20 年的概率为 0.8,超过 30 年的概率为 0.5，该机器使用 20 年以后，将在 10 年内损坏的概率为多少?

解：本例涉及两个事件A：“使用寿命超过 20 年”，B：“使用寿命超过 30 年”，题目所求的是在事件A发生的条件下，时间$\overline{B}$发生的条件概率.直接由条件概率的定义可计算.

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.5}{0.8}=\frac{5}{8}$$

$$P(\overline{B} \mid A)=1-P(B \mid A)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

将条件概率公式$P(A \mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$变形，得

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(A)P(B\mid A) \qquad (1.4.2)$$

此即概率的**乘法公式**.

(1.4.2)式容易推广到多个事件的积事件的情况.例如设 A,B,C 为事件， $P(AB)>0$ (从而 $P(A)>0$)，则有

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A) \qquad (1.4.3)$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2\mid A_1)P(A_1) \qquad (1.4.4)$$

[例 3] 已知 10 个零件中有 7 个正品，3 个次品.每次任取一个来测试，测试后不放回去，直到把三个次品都找到为止，求测试次数等于 4 的概率.

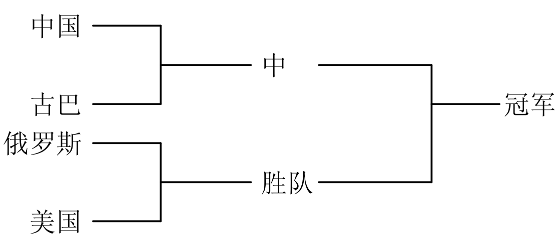
解：设 $A=$“前三次取到 2 个次品”， $B=$“第 4 次取到一个次品”，则所求概率为

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{40}$$

二、全概率公式与 Bayes 公式

为了建立这两个重要的概率公式，先看一个实例.

[例 4] 设在某次世界女排赛中，中国、俄罗斯、美国、古巴四队取得了半决赛权，对阵形式如下



现根据以往战绩，中国胜俄罗斯、美国的概率分别为 0.4,0.9,而俄罗斯胜美国的概率为 0.5, 中国队夺冠的概率有多大?

[分析] 根据上述形势，未完成的俄美半决赛对中国队夺冠有很大的影响.若美胜，则中国队有 90%的可能夺冠，几乎是稳操胜券；若俄胜，则冠亚军决赛将会特别艰苦.但这里，我们是在俄美未战之前来估量中国队的前景，当然需要同时综合考虑两种情况.

解：记“中国队夺冠”为事件 B，“俄胜美”为事件 A_1，“美胜俄”为事件 A_2，则 A_1，A_2 是对立事件，$\overline{A_1}=A_2$，$\overline{A_2}=A_1$， $A_1+A_2=\Omega$

$\therefore \quad B=B\Omega=B(A_1+A_2)=BA_1+BA_2$

$\because A_1A_2=\Phi$， $\quad \therefore BA_1\cap BA_2=\Phi$

$P(B)=P(BA_1+BA_2)=P(BA_1)+P(BA_2)$

利用条件概率公式（乘法公式）

$P(BA_1)=P(A_1)P(B\mid A_1)$ $\qquad$ $P(BA_2)=P(A_2)P(B\mid A_2)$

$P(A_1)=0.5=P(A_2)$，而 $P(B\mid A_1)$ 就是在俄罗斯 获决赛权时， 中国队夺冠的概率（0.4），$P(B\mid A_2)$ ）就是在美国获决赛权时，中国队夺冠的概率（0.9）

$\therefore P(B)=0.5\times0.4+0.5\times0.9=0.65$

该题的求解，实际上就是用了全概率公式，为了导出一般公式，我们先引入下列定义

定义 1.15 设 $A_1,A_2,\cdots,\ A_n$ 是一组事件，若满足

（1） $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$

（2） $A_iA_j=\Phi\quad(i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n)$

则称 $A_1,A_2,\cdots,\ A_n$ 为一个完备事件组.

给出一个完备事件组也称给出样本空间 Ω 的一个剖分（划分）.对于同一样本空间，剖分不唯一.

定理 1 .1 设 $A_1,A_2,\cdots,\ A_n$ 为一完备事件组，则对事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i) \tag{1.4.5}$$

称（1.4.5）式为全概率公式，前面的实例已经给出了概定理证明的思路，读者可仿照实例给出该定理的证明.

[例 5] 设甲箱中有 5 件正品和 3 件次品，乙箱中有 4 件正品和 3 件次品，从甲箱中任意取出 2 件产品放入乙箱，然后从乙箱中任取 2 件产品，求这 2 件产品全为正品的概率.

解：记“从乙箱中取出两件产品全为正品”为事件 B，“从甲箱中取出 0，1，2 件正品”的事件分别为 A_1， A_2， A_3，则 A_1， A_2， A_3 是一个完备事件组

$\therefore \quad B=B\Omega=B\ (A_1+A_2+A_3)\ )=BA_1+BA_2+BA_3$

$$P(B)=P(BA_1+BA_2+BA_3)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)$$

$$=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$$

$$=\frac{C_3^2}{C_8^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_9^2}+\frac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}\cdot\frac{C_5^2}{C_9^2}+\frac{C_5^2}{C_8^2}\cdot\frac{C_6^2}{C_9^2}$$

$$=\frac{53}{168}\cdot$$

Bayes 公式是与全概率公式相反的公式，它是在已知B发生的情况下，事件A_i发生的条件概率.

定理 1.2 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为一完备事件组，则对任意的事件B，若$P(B)>0$,则

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.4.6}$$

[例 6] 某工厂有甲，乙，丙三个车间，生产同一种产品，各个车间的产量分别占全厂产量的 25%，35%，40%，各车间产品的次品率分别为 5%，4%，2%，求（1）全厂的次品率；（2）若抽取一件产品，恰好是次品，问该产品是甲，乙，丙车间生产的概率各为多少?

解：用A_1, A_2, A_3表示取到甲、乙、丙车间的产品，B表示抽到次品，则A_1, A_2, A_3是一个完备事件组.

（1）求全厂的次品率.由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2) \\ &= 0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02 \\ &= 0.0345 \end{aligned}$$

（2）即要求在事件B发生条件下，事件A_1, A_2, A_3发生的概率.

由 Bayes 公式得

$P(A_1 \mid B)\approx 0.36$， $P(A_2 \mid B)\approx 0.41$ ， $P(A_3 \mid B)\approx 0.23$

一般地，若试验分为先后两个阶段，我们将第一阶段的所有可能结果构成一个完备事件组，称为“原因”，考虑第二阶段的某一结果B的发生情况，常常用全概率公式.所以全概率公式是“由因导果”.若结果B发生了，要求由原因A_i引起的概率$P(A_i \mid B)$，则

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

即 Bayes 公式.故 Bayes 公式是“由果溯因”，所以全概率公式和 Bayes 公式是相反的两个过程.

[例 7]

§5 事件的独立性及应用

一、事件的独立性

设A, B为两个事件，若$P(B)>0$,可以定义$P(A \mid B)$.一般来说，$P(A)\neq P(A \mid B)$,直

观的说，这表示B的发生对事件A发生的概率是有影响的，只有当$P(A)=P(A|B)$时，才可以认为这种影响不存在，这时自然会设想A,B是彼此独立的.

由乘法公式，$P(AB)=P(A|B)P(B)$，当$P(A)=P(A|B)$，

所以$P(AB)=P(A)P(B)$

从而引入下述定义：

定义 1.16 若事件A,B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A,B相互独立.

该定义在$P(A)=0$或$P(B)=0$的情况下仍然适用.

不难看出，如果$P(B)>0$，那么A,B的相互独立性等价于 $P(A)=P(A|B)$.

定理 1.3 如果A,B相互独立，那么三对事件A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立的.

证明：只证A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立.

因为$A=AB\bigcup A\overline{B}$，得 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$）

由A,B相互独立　故$P(AB)=P(A)P(B)$

从而$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$$=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)(1-P(B))$$

$$=P(A)P(\overline{B})$$

即A与$\overline{B}$相互独立.

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})$$

$$=1-P(A+B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=[1-P(A)][1-P(B)]$$

$$=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立

定义 1.17 设 $A_1, A_2, \cdots,\ A_n$ 是 n 个事件，称它们是相互独立的，如果对任意的 s $(2 \le s \le n)$，任意 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le n$ 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_s}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_s})$$

显然，要验证 n 个事件的相互独立性，须验证 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式.

特殊地，设 A, B, C 是三个事件，若满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 为相互独立的事件，而当 A, B, C 满足前三个等式时，称 A, B, C 两两独立.

显然，A, B, C 相互独立，则必然两两独立，而下面的例子说明两两独立不一定相互独立.

[例 1] 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$，$P(\omega_i) = \frac{1}{4}$，令 $A = \{\omega_1, \omega_2\}$，$B = \{\omega_1, \omega_3\}$，$C = \{\omega_1, \omega_4\}$，试讨论 A, B, C 的独立性.

解：显然 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$，因为 $AB = AC = BC = \{\omega_1\}$，$ABC = \{\omega_1\}$

所以 $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$，$P(ABC) = \frac{1}{4}$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(B)P(C)$$

即 A, B, C 两两独立.

又由于 $P(ABC) = \frac{1}{4} \ne \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(B)P(C)$

所以 A, B, C 不是相互独立.

这个例子说明，“两个事件互不影响”的直观概念和“独立事件”的数学概念是有一定差别的.

在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来加以判断的.

[例 2]甲、乙、丙三人按下面规则进行比赛，第一局由甲、乙参加，而丙轮空，由第一局的优胜者与丙进行第二局比赛，而第一局的失败者轮空.比赛用这种形式，一直进行到其中一人连胜两局为止.连胜两局者成为整场比赛的优胜者.若甲、乙丙每局比赛中获胜的概率均为 0.5，问甲、乙、丙成为整场比赛的优胜者的概率各为多少？

解：设 A_i 表示“第 i 局甲胜”，$i=1,2,\cdots$，A 表示“甲为整场比赛优胜者”，

B_i 表示“第 i 局乙胜”，$i=1,2,\cdots$，B 表示“乙为整场比赛优胜者”，

C_i 表示“第 i 局丙胜”，$i=1,2,\cdots$，C 表示“丙为整场比赛优胜者”.

则这场比赛所有可能的结果可表示为

$$A_1A_2, A_1C_2C_3, A_1C_2B_3B_4, A_1C_2B_3A_4A_5, A_1C_2B_3A_4C_5C_6, A_1C_2B_3A_4C_5B_6B_7, \cdots,$$

$$B_1B_2, B_1C_2C_3, B_1C_2A_3A_4, B_1C_2A_3B_4B_5, B_1C_2A_3B_4C_5C_6, B_1C_2A_3A_4C_5A_6A_7, \cdots$$

$$P(C)=P(A_1C_2C_3)+P(B_1C_2C_3)+P(A_1C_2B_3A_4C_5C_6+P(B_1C_2A_3B_4C_5C_6)+\cdots$$

$$=2\times\frac{1}{2^3}+2\times\frac{1}{2^6}+2\times\frac{1}{2^9}+\cdots$$

$$=2\times\frac{1/2^3}{1-1/2^3}$$

$$=\frac{2}{7}$$

由于甲、乙所处地位对称，所以

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}(1-P(C))=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{7})=\frac{5}{14}$$

故，甲、乙、丙成为整场比赛的优胜者的概率分别为 $\frac{5}{14},\frac{5}{14},\frac{2}{7}$.

[例 3]

二、在可靠性理论中的应用

事件的独立性在实践中有广泛的应用，特别地，对于各种工作系统运行的可靠性，从而对于系统的设计有着重要意义.

系统由一组元件组成，对于任一元件，它能正常工作的概率称为该元件的可靠性.同样，系统正常工作的概率就称为系统的可靠性.元件组成系统可以有各种不同的方式，从而由同样的元件组成的系统，会由于组合方式的不同而具有不同的可靠性，当然，系统的可靠性是系统设计的一个十分重要的指标，因此，有关的研究已发展成一个专门的分支学科—可靠性理论.

元件组合的两种最基本的方式是串联和并联.

设有 n 个元件，每个元件的可靠性均为 $r\,(0<r<1)$,且各元件能否正常工作是相互独立的，下面求串联和并联系统的可靠性.

（1）串联

将 n 个元件首尾相接所构成的系统称为串联系统.

用 A_i 表示第 i 个元件正常工作,则 $P(A_i)=r$，记 A 表示串联系统正常工作.

显然，串联系统正常工作 $\Leftrightarrow$ 其中每个元件都正常工作

所以 $A=A_1\cap A_2\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n$

从而 $P(A)=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=r^n$.

而并联系统正常工作等价于 n 个元件中至少有一个元件正常工作，记 B 表示并联系统正常工作，则

$B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n})$$

$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})=1-(1-r)^n$$

[例 4] 电路由电池 A 与两个并联的电池 B 与 C 串联而成，设电池 A,B,C 损坏的概率分别为 0.3,0.2,0.2,求电路发生断电的概率.

解：记 A,B,C 分别表示“电池 A,B,C 损坏”，记 D 表示“电路断电”

则 $P(D)=P(A+BC)=P(A)+P(BC)-P(ABC)$

$$=P(A)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

=1-0.672

=0.328

[例 5] 设系统 KL 与系统 MN 如图 所示，如果每个元件的可靠性均为 r，且每个系统中元件的工作状态相互独立，问哪个系统的可靠性较高?

解：设系统 KL、系统 MN 的可靠性分别为 R_{KL}、R_{MN}, C_i=“A_i 元件正常工作”,

D_i=“B_i 元件正常工作”， $i=1,2,\cdots,n$， 则

$$R_{KL}=P(C_1C_2\cdots C_n+D_1D_2\cdots D_n)$$

$$=P(C_1C_2\cdots C_n)+P(D_1D_2\cdots D_n)-P(C_1C_2\cdots C_nD_1D_2\cdots D_n)$$

$$=2r^n-r^{2n}$$

$$=r^n(2-r^n)$$

$$R_{MN} = P[(C_1+D_1)(C_2+D_2)\cdots(C_n+D_n)]$$

$$= P(C_1+D_1)P(C_2+D_2)\cdots P(C_n+D_n)$$

$$= (2r - r^2)^n$$

$$= r^n(2-r)^n$$

不难看出，当$n \geq 2$时，$R_{KL} < R_{MN}$.

§6　贝努里概型[1]

系统可靠性的计算是事件独立性广泛应用的一个方面.事实上，在了解了事件的独立概念之后，我们再回顾本章以前各节的一些子，可以发现有许多例子都具有事件独立性这一特征，如掷硬币的例子，产品有放回的抽样检查等等，这一大类模型具有一些重要的共同特征，我们可以归纳为以下几点：

（1）　每次试验都在相同的条件下进行；每次试验所对应的样本空间相同）；

（2）　各次试验是相互独立的；

（3）　每次试验有且仅有两种结果：$A, \overline{A}$；

（4）　每次试验结果发生的概率相同：$P(A) = p, P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

凡是具有上述特征的重复进行的试验就称为独立重复试验（贝努里（Bernoulli）试验），若试验共进行了n次，即称为n重独立重复试验（n重贝努里试验）.

这里有两点需要进一步说明，一是试验的独立性，所谓两次试验是相互独立的，当且仅当它们的任何结果之间是相互独立的；另一点需要说明的是上述特征中的（3），事实上，这一条并不是任何独立重复试验所必需的，我们完全可以把它推广到更一般的具有多种结果的场合，但后者情况的讨论要复杂的多.一般将只有两个可能结果的试验称为贝努里试验.

n重贝努里试验是一种非常重要的概率模型，它在理论上和实践两方面都有重要意义.从理论方面，前面关于频率和概率的讨论已经给了我们一个深刻的印象.事实上，只有在大量重复试验的基础上，频率的稳定性才能够表现出来，概率作为一种客观的度量才有了现实基础.

在实践方面，n重贝努里试验的重要意义在于其广泛的代表性，也就是说，在客观实际中存在着大量可以用n重贝努里试验来表示的概率问题.

在贝努里概型中，我们最关心的是“n次试验中，事件A恰好发生k次”的概率，记为$P_n(k)$.

定理 1.4　$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$　　$k = 1,2,\cdots n$　　$0 < p < 1, q = 1 - p$，

p为事件A发生的概率.

证明：n 次试验中，A 要发生 k 次,而在其余的 $n-k$ 次试验中不发生，先考虑其中指定的 k 次 A 发生,而在其余的 $n-k$ 次试验中 A 不发生，比如说

$A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\ \overline{A}_{k+2}\cdots\overline{A}_n$　　由独立性

$$p_k=P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=p^k(1-p)^{n-k}$$

考虑到排列的任意性，有 $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\qquad k=1,2,\cdots n$

[例 1] 某人进行 5 次独立射击，每次命中的概率为 p ,求下列事件的概率：

（1） 第 2 次和第 5 次命中；

（2） 恰好第 2 次和第 5 次命中；

（3） 恰好有两次命中；

（4） 至少有一次命中.

解: 记 A_i 表示“第 i 次射击命中目标”，则

(1) 第 2 次和第 5 次命中，即我们只关心第 2 次和第 5 次的射击结果

其概率为 $P(A_2A_5)=p^2$.

（2）恰好第 2 次和第 5 次命中,即是指定的两次命中，而其余三次都没有命中.故

所求概率为 $P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5)=p^2(1-p)^3$

（3）恰好有两次命中；由定理 1 知 $P_5(2)=C_5^2p^2(1-p)^3$

（4）至少有一次命中的概率为

$$1-P_5(0)=1-(1-p)^5$$

[例 2] 在 n 重贝努里试验中，每次实验事件 A 发生的概率为 p，求 n 次试验中 A 出现奇数次的概率.

解：设 A 发生偶数次的概率为 a，发生奇数次的概率为 b，则

$$a=C_n^0p^0q^n+C_n^2p^2q^{n-2}+\cdots,$$

$$b=C_n^1p\ q^{n-1}+C_n^3p^3q^{n-3}+\cdots,$$

则　$a+b=1=(p+q)^n$

$$a-b=(q-p)^n$$

于是 $b=\frac{1}{2}[1-(q-p)^n]=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$

注记[1] 瑞士数学家雅克·贝努里（Jacques Bernoulli,1654~1705）首次研究了独立重复试验.在他去世后的第 8 年，他的侄子尼克拉斯出版了贝努里的著作《推测术》，在书中，贝努里指出当独立重复试验的试验次数足够大时，那么成功次数所占的比例以概率 1 接近 p .

雅克·贝努里是这个最著名的数学家庭的第一代，在他之后的三代里，一共有 10 个左右的贝努里，在概率论、统计学和数学上作出了杰出的基础性贡献.他们的成果和影响都是非凡的.正如巴赫家族之于音乐，贝努里家族在数学界也是名门望族.

§7　概率计算综合举例

[例 1]（赌金分配问题）1651 年夏，法国数学、物理学家帕斯卡在一次旅途中偶遇贵族公子德·梅尔，他提出“分赌金问题”向帕斯卡求教.问题如下：德·梅尔和赌友掷一枚骰子，各押 32 枚金币，梅尔如果先掷 3 次 6 点或赌友先掷 3 次 4 点，就赢了对方，赌博进行了一段时间，梅尔已掷了 2 次 6 点，而对方掷了 1 次 4 点，此时梅尔接通知要马上陪国王接见外宾，赌博只好终止，请问两人如何分配 64 枚金币才算合理？

分析　关于赌金的分配有四种方案：

方案 1：平均分，这显然对梅尔欠公平.

方案 2：全部归梅尔，这显然对赌友不公平.

赌友提出了方案 3：他要再掷两次 4 点，而梅尔要再掷一次 6 点，才能赢了对方，所以有权分梅尔的一半，即梅尔分 64 枚金币的三分之二，而自己分三分之一.梅尔认为赌友的方案不对，提出方案 4：即使下次赌友掷一次 4 点，他还可以分分二分之一，即 32 枚金币；再加上下一次他还有一半希望得到 16 枚金币，所以应分应分 64 枚金币的四分之三，而赌友只能分四分之一.

究竟哪种方案合理？帕斯卡苦苦思索了两三年，才想出一点眉目，于是写信和好友费马讨论，结果人为梅尔提出的方案对荷兰数学、物理学家惠更斯也参加了讨论，结果写成《论赌博中的计算》一书，这是概率论最早的一本著作.下面我们就来看一看为什么梅尔的方案正确.

解：设想赌博继续进行下去，如果梅尔再赢一局，或赌友再赢两局就可以赢了对方.而梅尔赢一局和输一局的概率相等，各占二分之一.

记 $A=$“梅尔先赢一局”，$B=$“梅尔先输一局，再赢一局”，$C=$“梅尔赢了对方”，则 $C=A+B$，A 与 B 互斥.

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

而赌友赢了梅尔的概率为 $P(\overline{C})=1-P(C)=\dfrac{1}{4}$

因此，梅尔提出的方案是合理的.

[例 2]（传球问题）r 个人相互传球，从甲开始，每次传球时，传球者等可能地把球传给其余的 $r-1$ 个人中的任何一个.求第 n 次传球时仍由甲传出的概率 p_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

解：设 q_n 表示第 n 次传球由某人（非甲）传出的概率，由等可能性，此概率对其余 $r-1$ 个人都相同，于是

$$p_n+(r-1)q_n=1 \quad 故\ q_n=\frac{1}{r-1}(1-p_n) \tag{1}$$

为使第 n 次由甲传出，必须是第 $n-1$ 次传球由其余 $r-1$ 个人中之一传给甲，因此

$$p_n=(r-1)q_{n-1}\times\frac{1}{r-1}=q_{n-1},\qquad n\ge 1 \tag{2}$$

综合（1），2） 得

$$\begin{cases} p_n = \dfrac{1}{r-1}(1-p_{n-1}), \quad n \ge 1 \\ \qquad p_0 = 1 \end{cases}$$

所以 $p_n = \dfrac{1}{r-1} - \dfrac{1}{r-1} p_{n-1} = \dfrac{1}{r-1} - \dfrac{1}{(r-1)^2}(1-p_{n-2}) = \cdots$

$$= \frac{1}{r-1} - \frac{1}{(r-1)^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(r-1)^n} p_0$$

$$= \frac{1}{r}[1-(\frac{1}{r-1})^n], \quad n \ge 2$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{r}.$$

即当传球次数足够大时，每一个人传出的概率相等.

下面再看一个和梅尔有关的问题.

[例 3] （梅尔问题）十七世纪末，梅尔注意到在赌博中一对骰子抛 25 次，把赌注押到“至少出现一次对六”，比把赌注押到“完全不出现对六”有利，但他本人找不到原因，后来请教数学家帕斯卡才解决问题.这个问题是如何解决的呢?

解：设至少掷一对骰子 n 次，才能使“至少出现一次对六”的概率大于“完全不出现对六”的概率.记 A_i =“第 i 次出现对六”，则 $P(A_i) = \dfrac{1}{36}$，$i = 1,2,\cdots,n$

P {至少出现一次对六}= $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$

$$= 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + \cdots A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

P {完全不出现对六}= $\left(\dfrac{35}{36}\right)^n$

依题意 $\quad 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n > \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \qquad \left(\dfrac{35}{36}\right)^n < \dfrac{1}{2}$

解得 $\quad n > \dfrac{-\ln 2}{\ln 35 - \ln 36} \approx 24.61$

所以，把赌注押到“至少出现一次对六”，比把赌注押到“完全不出现对六”有利，应至少掷 25 次.

[例 4] （巴拿赫火柴盒问题）数学家的左右衣袋中各放有一盒装有 N 根火柴的火柴盒，每次抽烟时任取一盒用一根，求发现一盒用完，另一盒有 r 根的概率 P.

解: 这个问题可看作 $p=\frac{1}{2}$ 的贝努里试验.要左边空而右边剩 r 根，应是左边摸过 $N+1$ 次（前 N 次用去 N 根火柴，最后一次发现火柴盒是空的），而右边摸过 $N-r$ 次，该事件的概率为

$$C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-r}\left(\frac{1}{2}\right)=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}$$

对于右边先空的情况可同样考虑，故所求概率为

$$P=2C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r}$$

特别地，当 $r=0$ 时，$P=C_{2N}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}$，当 $r=N$ 时，$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$.

[例 5] 袋中装有 α 个白球和 β 个黑球，现采用以下三种方式从中任取 $a+b$ 个球（$a\le\alpha,\ \ b\le\beta$），试求所取出球恰有个 a 白球和 b 个黑球的概率.

（1）从袋中一次性抽取；
（2）每次取一个，取后不放回；
（3）每次取一个，取后放回.

解：设 $B=$“取出 $a+b$ 个球恰有 a 个白球和 b 个黑球”

（1）样本点总数为 $C_{\alpha+\beta}^{a+b}$，B 包含样本点总数 $C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}$，所以

$$P(B)=\frac{C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$$

（2）样本点总数为 $P_{\alpha+\beta}^{a+b}$，B 包含样本点总数 $C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}(a+b)!$，所以

$$P(B)=\frac{C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}(a+b)!}{P_{\alpha+\beta}^{a+b}}=\frac{C_{\alpha}^{a}C_{\beta}^{b}}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$$

（3）在取后放回的情况下，抽到的白球数 $X\sim B(a+b,\frac{\alpha}{\alpha+\beta})$，所以

$$P(B)=C_{a+b}^{a}(\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^{a}(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^{b}$$