# 第三章　随机向量

## §3.1　随机向量的概念

我们已经知道，可以在同一个概率空间$(\Omega, F, P)$上定义多个随机变量.对于这些随机变量，我们除了可以逐个研究它们的性质和分布之外，有时还需要把它们作为一个整体（即向量）来研究它们的联合性质，从各分量的相依关系上加以讨论.

我们首先来明确随机向量的概念.

如果$X_1, X_2, \cdots,\ X_n$是定义在同一概率空间$(\Omega, F, P)$上的$n$个随机变量，就把$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为一个$n$维随机向量.换言之，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个记为$n$维随机向量，当且仅当$X_1, X_2, \cdots,\ X_n$是定义在同一个概率空$(\Omega, F, P)$上的$n$个随机变量.其中$X_i$称为向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的第$i$个分量.

**定义 3.1** 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是随机向量，称$R^n$上的$n$元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\} \tag{3.1}$$

为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合概率分布函数，简称为分布函数或联合分布.

和一维随机变量完全平行地，对联合分布，我们有

性质 1　$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是关于每个自变元$x_i$的不减函数；

性质 2　$0 \le F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le 1$；

性质 3　$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 $R^n$上的右连续函数.

对于$1 \le k < n$，从$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布，容易得到$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$的联合分布如下

$$\begin{aligned} F_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_k \le x_k\} \\ &= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_k \le x_k, X_{k+1} \le \infty, \cdots, X_n \le \infty\} \\ &= F(x_1, x_2, \cdots, x_k, \infty, \cdots, \infty) \end{aligned}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$的分布函数 $F_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)$又称为边缘分布 .不难看出，$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$有$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^n - 2$个边缘分布 .边缘分布由联合分布

$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$惟一决定.

对二维随机向量$(X,Y)$，设其联合分布为$F(x,y)$，则$X,Y$的边缘分布分别为

$$F_X(x)=P\{X\le x,Y\le\infty\}=F(x,\infty)$$

$$F_Y(y)=P\{X\le\infty,Y\le y\}=F(\infty,y)$$

且对任意的$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，$x_1<x_2$，$y_1<y_2$ 易证

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0 \qquad (3.2)$$

我们称这个结果为差分非负性.这个结果也可以推广到$n$维随机向量的情形.

性质 4 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有下述意义上的增量非负性: 对任何$a_j\le b_j$, $j=1,2,\cdots,n$都有

$$\Delta_{(a_1,\cdots,a_n)}^{(b_1,\cdots,b_n)}F=\sum\pm F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ge 0 \qquad (3.3)$$

其中共有$2^n$个加项，在每一项中，都有$x_j=a_j$或$b_j$，$j=1,2,\cdots,n$，并且当$x_j=a_j$的$j$的个数为偶数时，该项之前为“+”号，当$x_j=a_j$的$j$的个数为奇数时，该项之前为“-”号.

应注意，在一维的情形满足性质 1，2，3 的函数必是某随机变量的分布函数.但在多维（$n\ge 2$）的情况下，性质 4 不能由性质 1，2，3 推出，因而性质 4 是多维分布函数特有的性质.且看下例

**[例 1]** 设

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

**解:** 不难验证，$F(x,y)$有性质 1，2，3.但在性质 4 中，我们取$a_1=a_2=0,b_1=b_2=2$，则有

$$\Delta F=F(2,2)-F(0,2)-F(2,0)-F(0,0)=-1<0.$$

因此$F(x,y)$不是分布函数.

与一维情况类似，$n$维随机向量的分布也有离散型分布和连续型分布.为方便起见，下面仅讨论二维随机向量.

## §3.2 二维离散型随机向量

对于二维随机向量$(X,Y)$，若其取值是有限对或可列对，则称$(X,Y)$为二维离散型随机向量.设相应的取值为$(x_i, y_i)$, $i,j=1,2,\cdots$, 令$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, 称为二维随机向量$(X,Y)$的联合分布列.

二维联合分布列是一张平面上的表

| $Y \backslash X$ | $x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots$ | $\sum$ |
|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11} \quad p_{21} \quad \cdots \quad p_{i1} \quad \cdots$ | $p_{.1}$ |
| $y_2$ | $p_{12} \quad p_{22} \quad \cdots \quad p_{i2} \quad \cdots$ | $p_{..2}$ |
| $\vdots$ | $\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ | $\vdots$ |
| $y_j$ | $p_{1j} \quad p_{2j} \quad \cdots \quad p_{ij} \quad \cdots$ | $p_{.j}$ |
| $\vdots$ | $\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ | $\vdots$ |
| $\sum$ | $p_{1.} \quad p_{2.} \quad \cdots \quad p_{i.} \quad \cdots$ | 1 |

与一维随机变量一样，二维随机向量的联合分布列具有以下性质：

1） $p_{ij}\ge 0, \quad i,j=1,2,\cdots;$

2） $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=1;$

3） $$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\bullet}, \tag{3.4}$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\bullet j} \tag{3.5}$$

称$p_{i\bullet}$为$X$的边际（缘）分布列，$p_{\bullet j}$为$Y$的边际（缘）分布列.具体操作可在表上作业.

**[例 1]** 将两个不同的小球随机地放入 3 个带有编号 1，2，3 的盒子，以$X$表示空盒的个数，以$Y$表示放有小球的盒子的最小编号，求$(X,Y)$的联合分布列.

**解:** 易知$X$的取值集合为$\{1,2\}$，$Y$的取值集合为$\{1,2,3\}$.

当 $X=2$ 时，两个小球放在同一个盒中，并且该盒子的编号 $j$ 就是放有小球的盒子的最小编号，亦即 $Y$ 的取值.所以

$$p_{2j}=P\{X=2,Y=j\}=\frac{1}{9}, j=1,2,3$$

当 $X=1$ 时，两个小球放在两个不同的盒中，此时放有小球的盒子的最小编号只能为 1 或 2，所以

$$p_{13}=P\{X=1,Y=3\}=0\text{；}$$

而当放有小球的最小编号为 1 时，有一个球放在 1 号盒中，另一个球则放在 2 号或 3 号盒中，容易算出

$$p_{11}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{9}$$

当放有小球的盒子的最小编号为 2 时，两个球分别放在 2 号和 3 号盒中，所以

$$p_{12}=P\{X=1,Y=2\}=\frac{2}{9}.$$

故 $(X,Y)$ 的联合分布列为

| $X$ / $Y$ | 1 | 2 | **3** |
|---|---|---|---|
| 1 | 4/9 | 2/9 | **0** |
| **2** | **1/9** | **1/9** | **1/9** |

**[例 2]**一整数 $X$ 随机在 1，2，3，4 四个整数中取一个值；另一整数 $Y$ 则在 1~ $X$ 中随机取一个值.

1）求 $(X,Y)$ 的分布列，2）求 $X,Y$ 的分布列.

**解：**由题设，有样本空间

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\quad (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\quad (3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\quad (4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

其中有 6 个基本事件（1，2），1（ 3），1（ 4），2（ 3），2（ 4），3（ 4）是不合题意的，相应的概率为 0，其余的概率由下式求出

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i},\quad i=1,2,3,4; j\le i$$

于是 $(X,Y)$ 的联合分布律为

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 1/8 | 1/12 | 1/16 | 25/48 |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/12 | 1/16 | 13/48 |
| 3 | 0 | 0 | 1/12 | 1/16 | 7/48 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/16 | 3/48 |
| $\sum$ | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1 |

边际分布列在上表中已求出.

**[例 3]** 袋中装有 2 只白球和 3 只黑球，定义

$$\xi=\begin{cases}1, & \text{第一次摸出白球}\\ 0, & \text{第一次摸出黑球}\end{cases} \qquad \eta=\begin{cases}1, & \text{第二次摸出白球}\\ 0, & \text{第二次摸出黑球}\end{cases}$$

求在下列两种情况下（$\xi \quad \eta$) 的分布律及$\xi$, $\eta$的分布律.（1）取后放回；（2）取后不放回.

**解：**（1）取后放回：此时容易计算得联合分布与边际分布如下表

| $\eta \backslash \xi$ | 0 | 1 | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $3/5\times 3/5$ | $2/5\times 3/5$ | 3/5 |
| 1 | $3/5\times 2/5$ | $2/5\times 2/5$ | 2/5 |
| $\sum$ | 3/5 | 2/5 | 1 |

（2）取后不放回：同理可得联合分布与边际分布如下表

| $\eta \backslash \xi$ | 0 | 1 | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $3/5\times 2/4$ | $2/5\times 3/4$ | 3/5 |
| 1 | $3/5\times 2/4$ | $2/5\times 1/4$ | 2/5 |
| $\sum$ | 3/5 | 2/5 | 1 |

这里要注意一个重要事实，虽然上述两种情况下边际分布是相同的，但它们的联合分布却完全不同.由此可见，由边际分布并不能唯一的确定联合分布，还必须考虑$\xi$与$\eta$之间的关系.这说明，二维随机向量并不是将两个一维随机变量简单相加或相拼凑的结果.对随机向量来说，各分量之间的联系是特别重要的.

而随机变量之间的联系，最为特殊的是变量之间相互独立，我们有下述结论：

**引理 3.2** 设 $X_1, X_2, \cdots, \quad X_n$ 相互独立，则对任何 Borel 集 $A_1, A_2, \cdots, \quad A_n$，事件

$$\{X_1 \in A_1\},\ \{X_2 \in A_2\},\ \cdots,\ \{X_n \in A_n\}$$

相互独立.

定理的证明略去.

**定理 3.3** 设离散型随机变量 $(X,Y)$ 的所有不同的取值为 $(x_i, y_i)$, $i, j = 1,2,\cdots$, 则 $X,Y$ 相互独立的充分必要条件是对任何 $(x_i, y_i)$, $i, j = 1,2,\cdots$,

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}\, P\{Y = y_j\}. \qquad (3.6)$$

**证明**：如果（3.6）式成立，则对任意 $x, y \in R$，利用概率的可列可加性得

$$\begin{aligned} P\{X \le x, Y \le y\} &= P\{\bigcup_{i:x_i \le x}\{X = x_i\}, \bigcup_{j:y_j \le y}\{Y = y_j\}\} \\ &= \sum_{i:x_i \le x}\sum_{j:y_j \le y} P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ &= \sum_{i:x_i \le x}\sum_{j:y_j \le y} P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} \\ &= \sum_{i:x_i \le x} P\{X = x_i\} \sum_{j:y_i \le y} P\{Y = y_j\} \\ &= P\{X \le x\}P\{Y \le y\} \end{aligned}$$

于是 $X,Y$ 相互独立.

反过来，设 $X,Y$ 相互独立，由于 $A = \{x_i\}$ 和 $B = \{y_i\}$ 都是 Borel 集，由引理知 $\{X = x_i\} = X \in A$ 与 $\{Y = Y_j\} = \{Y \in B\}$ 独立，故有（3.6）式成立.

## §3.3　　二维连续型随机向量

**定义 3.2** 设 $(X,Y)$ 为二维随机向 量，其联合分布函数为 $F(X,Y)$，若存在非负函数 $p(x, y)$，使得对于任意的实数 $x, y$ 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u, v)dudv \qquad (3.7)$$

成立，则称 $F(X,Y)$ 是一个连续型随机向量 $(X,Y)$ 的联合分布函数，其中 $p(x, y)$ 称为连续型随机向量 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数.

$p(x, y)$ 具有以下性质：

（1） $p(x,y)\geq 0$;

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$;

（3） 对于 $p(x,y)$ 的连续点 $x,y$,有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y);$$

（4） 若 $G$ 是平面上的一个区域，则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G p(x,y)dxdy. \tag{3.8}$$

以上性质可在几何意义下加以说明： $z=p(x,y)$ 表示空间中的一个曲面，性质（1）说明这个曲面位于 $xoy$ 平面之上；性质 2 说明曲面以下，$xoy$ 平面以上空间区域的总体积为 1；性质 4 说明随机点 $(X,Y)$ 落入平面区域 $G$ 的概率等于以 $G$ 为底，以曲面 $z=p(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

下面研究连续型随机向量 $(X,Y)$ 的边际密度及两个随机变量之间的独立性问题.

**定义 3.3** 二维随机向量的联合概率密度函数为 $p(x,y)$,称

$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy$ 为 $(X,Y)$ 关于 $X$ 的边际（缘）密度函数，同理，

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$ 为 $(X,Y)$ 关于 $Y$ 的边际（缘）密度函数.

**定理 3.4** 对二维随机向量 $(X,Y)$， $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y) \tag{3.9}$$

**[例 1]** 设 $(X,Y)$ 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}C & a<x<b,c<y<d\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（1）求 $C$ 的值；

（2）验证 $X$ 与 $Y$ 的独立性.

**解：**（1）由性质 2，立即得

$$\iint\limits_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq x\leq d}}Cdxdy=1$$

故

$$C=\frac{1}{(b-a)(d-c)}$$

（2）由定理 2，要验证 $X$ 与 $Y$ 的独立性，必须先求出 $X$ 与 $Y$ 的边际密度

当 $a<x<b$ 时

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{(b-a)}$$

当 $x$ 取其他值时， $p_X(x)=0$；

同样，当 $c<y<d$ 时

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dx=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dx=\frac{1}{(d-c)}$$

当 $y$ 取其他值时， $p_Y(y)=0$.

即 $X$ 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

即 $Y$ 的密度函数为 $p(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & c<y<d\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

它们分别服从区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上的均匀分布.显然 $X$ 与 $Y$ 相互独立.

因此，一般地，若 $(X,Y)$ 的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a<x<b,c<y<d\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称 $(X,Y)$ 服从 $D=\{a<x<b,c<y<d\}$ 上的均匀分布，记为 $(X,Y)\sim U(D)$.

**[例 2]** 已知 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-y+1} & x>1,y>1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

求 $X,Y$ 的边际密度函数，并验证 $X$ 与 $Y$ 的独立性.

**解：** 当 $x>1$ 时 $\quad p_X(x)=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}dy=\frac{2}{x^3}$，

其他 $p_X(x)=0$；

当 $y>1$ 时，　$p_Y(y)=\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}e^{-y+1}dx=e^{-y+1}$，

其他 $p_Y(y)=0$　.

即 $X,Y$ 的边际密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3} & x>1, \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y+1} & y>1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

显然 $X,Y$ 相互独立.

**[例 3]**　设随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}, \tag{3.10}$$

其中 $\mu_1,\mu_2$ 是常数，$\sigma_1,\sigma_2$ 是正常数，$\rho$ 是 $(-1,1)$ 中的常数.求 $X,Y$ 的边际密度函数，证明 $X$ 与 $Y$ 独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

**解：**记 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$，　$v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，　$\mu=\rho u$，　$\sigma=\sqrt{1-\rho^2}$

得　$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

$$=\frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2\rho uv+v^2\right]\right\}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2\right]\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dv\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}\right)$$

即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$，完全对称地可得$Y$的密度函数为

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}\right).$$

由 $X$ 与 $Y$ 相互独立的充要条件 $p(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$ （3.9）

当 $\rho = 0$ 时，显然（3.9）式成立，于是 $X$ 与 $Y$ 相互独立.

反过来，当 $X$ 与 $Y$ 相互独立时，有（3.9）式成立，取 $(x,y) = (\mu_1, \mu_2)$ 得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

于是 $\rho = 0$.即证明了 $X$ 与 $Y$ 独立的充分必要条件是 $\rho = 0$.

若 $(X,Y)$ 具有（3.10）式所表示的密度函数，则称 $(X,Y)$ 服从二元正态分布，记为

$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2; \rho)$.

## §3.4 随机向量函数的分布

我们在上一章讨论过随机变量的函数，现在来讨论随机向量的函数.我们先从最简单的情况开始.

一、随机变量和的分布

设 $(X,Y)$ 是二维离散型随机向量 ，它的取值集合为 $\{(i,j) \mid i,j = 0,1,\cdots\}$ ，并且 $P\{X=i, Y=j\} = p_{i,j}$ ，如果 $Z = X+Y$ ，那么 $Z$ 的取值集合当然是非负整数集合，并且有

$$P\{Z=k\} = P\{X+Y=k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X=i, Y=k-i\} = \sum_{i=0}^{k} p_{i,k-i}, k = 0,1,\cdots \quad （3.11）$$

特别地，如果 $X,Y$ 是相互独立只取非负整数值的随机变量，并且

$P\{X=i\} = a_i$, $P\{Y=j\} = b_j$, 则（3.11）式变为

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i},\quad k=0,1,\cdots \tag{3.12}$$

**定义 3.4** 我们把相互独立的随机变量的和的分布称为参与求和的随机变量的分布的卷积，而把（3.12）式称为离散卷积公式.特别地，如果参与求和的随机变量的分布相同，则我们就把它们的和的分布称为该种分布的自卷积.

**[例 1]** 设 $X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$，且 $X,Y$ 相互独立，$0<p<1$，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布.

解：记 $q=1-p$，由离散卷积公式

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p_i q^{n-i}\cdot C_m^{k-i}p^{k-i}q^{m-k+i}$$

$$=p^k q^{m+n-k}\sum_{i=0}^{k}C_n^i C_m^{k-i}=C_{m+n}^k p^k q^{m+n-k},\quad k=0,1,\cdots$$

上述结果表明，$Z=X+Y$ 服从二项分布 $B(m+n,p)$.我们把这个性质称为二项分布的卷积封闭性.从直观上很容易理解这一结果，因为 $X$ 表示 $n$ 次 Bernoulli 试验中的成功次数，$Y$ 表示 $m$ 次 Bernoulli 试验中的成功次数，如果前后一共 $m+n$ 次试验相互独立，那么 $Z=X+Y$ 就是这 $m+n$ 次独立重复试验中的成功次数，当然应当服从二项分布 $B(m+n,p)$.

读者可以自证，几何分布和 Poisson 分布也具有卷积封闭性.

对于二维连续型随机变量，我们有如下定理.

**定理 3.5** 若 $(X,Y)$ 是二维连续型随机变量，其联合密度为 $p(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 是连续型随机变量，且具有密度函数

$$p_Z(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x-t,t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,x-u)du,\quad \forall x\in R \tag{3.13}$$

**证明：**先求 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F(x)$，由积分的有关性质，我们有

$$F(x)=P\{X+Y\le x\}=\iint_{u+v\le x}p(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{x-u}p(u,v)dv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{x}p(u,t-u)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\{\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,t-u)du\}dt$$

所以， $p_Z(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,x-u)du$

同理，改变积分顺序，可得（3.13）中的第一式.

特别地，如果 $X,Y$ 相互独立，则(3.13)式变为

$$p_Z(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x-t)p_Y(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(u)p_Y(x-u)du,\quad \forall x\in R \qquad (3.14)$$

**定义 3.5** 我们把（3.13）式称为密度函数 $p_X(x)$ 与 $p_Y(y)$ 的卷积公式.

**[例 2]** 设随机变量 $X,Y$ 相互独立，同服从 $\lambda=1$ 的指数分布，试求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

**解**：注意到 $p_X(x)=e^{-x},x>0$，$p_Y(u-x)=e^{-(u-x)},u-x>0$，故为了要使卷积公式（3.14）中被积函数非零，当且仅当 $x>0$ 且 $u-x>0$，即 $0<x<u$.即 $u\le 0$ 是不可能的，故此时 $p_{X+Y}(u)=0$，而当 $u>0$ 时，有

$$p_{X+Y}(u)=\int_0^u e^{-x}e^{-(u-x)}dx=ue^{-u}.$$

即 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$p_{X+Y}(u)=\begin{cases}ue^{-u},u>0\\ 0,\quad u\le 0\end{cases}$$

显然，指数分布的卷积不再是指数分布.

二、随机变量积的分布

**定理 3.6** 若 $(X,Y)$ 是二维连续型随机变量，其联合密度为 $p(x,y)$，则 $Z=XY$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|p(x,\frac{z}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{y}\right|p(\frac{z}{y},y)dy,\quad \forall z\in R \qquad (3.15)$$

**证明**：$Z=XY$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le x\}=P\{XY\le z\}=\iint_{xy\le z}p(x,y)dxdy$$

而区域 $xy\le z$ 相当于 $\begin{cases}y\le\dfrac{z}{x},\quad x>0\\ y\ge\dfrac{z}{x},\quad x<0\end{cases}$，于是

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}dx\int_{\frac{z}{x}}^{+\infty}\frac{1}{x}p(x,\frac{z}{x})dy+\int_0^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}}\frac{1}{x}p(x,\frac{z}{x})dy$$

两边对 z 求导，得 $Z=XY$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}p(x,\frac{z}{x})dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}p(x,\frac{z}{x})dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|p(x,\frac{z}{x})dx$$

完全平行地，可以推证（3.15）的第二式.

**[例 3]** 设 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求 $Z=XY$ 的密度函数.

**解：** $F_Z(z)=P\{Z\le x\}=P\{XY\le z\}=\iint\limits_{xy\le z}p(x,y)dxdy$，

当 $z\le 0$时，$F_Z(z)=0$；

当 $z>0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{xy\le z\\ x>0,y>0}}xe^{-x(1+y)}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\frac{z}{x}}xe^{-x(1+y)}dy=1-e^{-z}$

所以 $Z$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, z>0\\ 0, \quad z\le 0\end{cases}$$

三、随机变量商的分布

**定理 3.7** 若 $(X,Y)$ 是二维连续型随机变量，其联合密度为 $p(x,y)$，则 $Z=\frac{X}{Y}$ 是连续型随机变量，且具有密度函数

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|p(zt,t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|p(u,zu)du,\quad \forall x\in R$$

**证明：** 先求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le x\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint\limits_{u/v\le z}p(u,v)dudv$$

$$=\iint\limits_{\substack{u\le vz\\ v>0}}p(u,v)dudv+\iint\limits_{\substack{u\ge vz\\ v<0}}p(u,v)dudv$$

$$=\int_0^{+\infty}dv\int_{-\infty}^{xv}p(u,v)du+\int_{-\infty}^{0}dv\int_{xv}^{+\infty}p(u,v)du$$

$$=\int_0^{+\infty}dv\int_{-\infty}^{x}vp(tv,v)dt+\int_{-\infty}^{0}dv\int_{x}^{+\infty}vp(tv,v)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\{\int_{-\infty}^{+\infty}|v|p(tv,v)dv\}dt$$

故 $Z=\frac{X}{Y}$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|p(zt,t)dt$$

完全平行地，只要改变积分顺序，可证第二个等式成立.

**[例 4]** 设 $X,Y$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数.

解：由已知可得 $X,Y$ 的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},\quad -\infty<x,y<+\infty$$

$$F_Z(z)=P\{Z\le x\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint\limits_{x/y\le z}p(u,v)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{yz}^{+\infty}p(x,y)dx+\int_{0}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{yz}p(x,y)dx$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|p(yz,y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|e^{-\frac{1}{2}(y^2z^2+y^2)}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}ye^{-\frac{1}{2}(y^2z^2+y^2)}dy$$

$$=\frac{1}{\pi(1+z^2)},\quad -\infty<z<+\infty$$

此时，我们称 $Z$ 服从柯西（Cauchy）分布.