第一章　概率论的基本概念

2、解：(1)“A 发生，B 与 C 不发生”= $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

(2)“A 与 B 都发生，而 C 不发生”= $A\cdot B\cdot\overline{C}$

(3)“A，B，C 中至少有一个发生”= $A+B+C$

(4)“A，B，C 都发生”= $A\cdot B\cdot C$

(5)“A，B，C 都不发生”= $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

(6)“A，B，C 中不多于一个发生”= $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$

(7)“A，B，C 中不多于两个发生”

$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C$

(8)“A，B，C 中至少有两个发生”

$=A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot C$

3、解：∵P(A+B)=P(A)+P(B)−P(AB)

∴P(AB)=P(A)+P(B)−P(A+B)=0.6+0.7−P(A+B)=1.3− P(A+B)

∵A $\subset A+B\subset S\Leftrightarrow P(A)\leqslant$ P(A+B) $\leqslant$ P(S) $\Leftrightarrow 0.6\leqslant$ P(A+B) $\leqslant 1$

B $\subset A+B\subset S\Leftrightarrow P(B)\leqslant$ P(A+B) $\leqslant$ P(S) $\Leftrightarrow 0.7\leqslant$ P(A+B) $\leqslant 1$

∴0.7≤P(A+B)≤1

当 P(A+B)=0.7 时，P(AB)取得最大值为 1.3−0.7=0.6.

当 P(A+B)=1　时，P(AB)取得最小值为 1.3−1=0.3.

4、解　已知 P=P(A)=P(B)=P(C)= $\frac{1}{4}$ ，P(AB)=0　， P(AC)= $\frac{1}{8}$

则 A、B、C 至少有一个发生的概率为

P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)−P(AB)−P(AC)−P(BC)+P(ABC)

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+$ P（ABC）$=\frac{5}{8}+$ P（ABC）

∵ABC $\subset$ AB　　∴0≤P(ABC)≤P(AB)=0　　P(ABC)=0

故 P(ABC)= $\frac{5}{8}$　（答）

6、解：设 A=“最小号码为 5”；B=“最大号码为 5”.

n= $C_{10}^{3}=120$　；　K(A)= $C_1^1\cdot C_5^2=10$　；　K(B)= $C_1^1C_4^2=6$

P(A)$=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$=0.0833　；　P(B)$=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$=0.05　.

7、解：设 A=“顾客能按订单如数得到 4 桶白漆、3 桶黑漆、2 桶红漆”

n=C_{17}^{9}　；　K=$C_{10}^{4}C_{4}^{3}C_{3}^{2}$　；　P(A)$=\frac{C_{10}^{4}C_{4}^{3}C_{3}^{2}}{C_{17}^{9}}=\frac{252}{2431}=0.1037$　（答）

8、解：设 A=“恰有 90 个次品”　；B=“至少有 2 个次品”.

n=C_{1500}^{200}　；　K(A)$=C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}$　；　K(B)$=C_{1500}^{200}-[C_{400}^{0}\cdot C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}]$

P(A)$=\frac{K(A)}{n}=\frac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$　；　P(B)$=\frac{K(B)}{n}=\frac{C_{1500}^{200}-C_{1100}^{200}-C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$

9、解：设 A=“从 5 双鞋子中任取 4 只，至少有 2 只鞋子成双”

$\overline{A}=$“从 5 双鞋子中任取 4 只，4 只鞋子都不成双”

n=C_{10}^{4}=210　；　$K(\overline{A})=C_{5}^{4}\cdot C_{2}^{1}C_{2}^{1}C_{2}^{1}C_{2}^{1}$=80　.

P($\overline{A}$)$=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$　；　P(A)=1$-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$　（答）.

11、解：n=$4^{3}=64$　设 $A_i=$“杯子中球的最大个数为 I”　i=1、2、3.

$K(A_1)=4\times3\times2=24$　　$\therefore P(A_1)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$

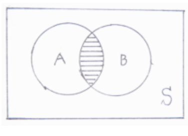
$K(A_3)=4$　　$\therefore P(A_3)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$

$\because A_1+A_2+A_3=S$,且 A1,A2,A3 两两互不相容,有$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$

$\therefore P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$

13、解：P(B｜A+$\overline{B}$)$=\frac{P[B(A+\overline{B})]}{P(A+\overline{B})}=\frac{P(BA+B\overline{B})}{P(A+\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$

$\because$P($\overline{A}$)=0.3 $\Rightarrow$P(A)=0.7 ；P(B)=0.4 $\Rightarrow$ P($\overline{B}$) =0.6，又知 P(A$\overline{B}$) =0.5,



$\therefore$P(AB)=P(A−A$\overline{B}$) =P(A)−P(A$\overline{B}$) =0.7−0.5=0.2

$\therefore P(B \mid A+\overline{B})=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$

14、解：$P(A)=\frac{1}{4}$ ； $P(B \mid A)=\frac{1}{3}$ ； $P(A \mid B)=\frac{1}{2}$

$P(AB)=P(A)P(B \mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ ；

由 $P(AB)=P(B)\ P(A \mid B)$ 得 $P(B)=P(AB)\div P(A \mid B)=\frac{1}{12}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

15、解Ⅰ:设 A=“两骰子点数之和为 7” ；B=“有一个骰子出现 1 点”

$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}$ （$\because A\supset B$）

设 C_iD_j=“第 1 个骰子出现 i 点，第 2 个骰子出现 j 点”i, j=1, 2, 3, 4, 5. 6.

则 $A=C_1D_6+C_2D_5+C_3D_4+C_4D_3+C_5D_2+C_6D_1$

$P(A)=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{1\times1}{6\times6}=\frac{1}{6}$

$B=C_1D_6+C_6D_1$

$P(B)=\frac{1\times1}{6\times6}+\frac{1\times1}{6\times6}=\frac{1}{18}$

$\therefore P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{18}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

解Ⅱ: $S_A=\{C_1D_6,C_2D_5,C_3D_4,C_4D_3,C_5D_2,C_6D_1\}$ ； $S_B=\{C_1D_6,C_6D_1\}$

$n_A=6$ $K_B=2$ $\therefore P(B \mid A)=\frac{K_B}{n_A}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

16、解:设 M=“母亲和孩子得病而父亲未得病”

A=“孩子得病” ；B=“母亲得病” ；C=“父亲得病” . 则

$M=AB\overline{C}$ $\Rightarrow$ $P(M)=P(A)P(B \mid A)P(\overline{C} \mid AB)$

$\because P(A)=0.6$ ； $P(B \mid A)=0.5$ ； $P(\overline{C} \mid AB)=1-0.4=0.6$

$\therefore P(M)=0.6\times0.5\times0.6=0.18$ （答）

17、解Ⅰ：设 A_i＝“第 i 次取得正品” i=1,2

(1) A=“两只都是正品” 则 A=A_1A_2

$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$ （答）

(2) 设 B=“两只都是次品” 则 B=$\overline{A}_1\overline{A}_2$

$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$ （答）

(3) 设 C=“一只正品，一只次品” 则 C=$A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$

$P(C)=P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$ （答）

(4) 设 D=“第二次取得次品” 则 D=$A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2$

$P(D)=P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$ （答）

解Ⅱ：用古典定义 $P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$ ； $P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$

$P(C)=\frac{C_8^1C_2^1+C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$ ； $P(D)=\frac{C_8^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$

18、解Ⅰ：设 A=“拨号不超过 3 次而接通电话”

A_i＝“第 i 次拨号接通电话”

∴A=$A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)+p(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$

$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$ （答）

解Ⅱ：设 $\overline{A}$＝“拨号 3 次而未接通电话” ； $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

$\therefore P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

若最后一个数字为奇数，P(A)的值如何？(学生思考)

解Ⅱ：$P(A)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$

解Ⅰ:P(A)=$1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

19、解:（1）设 A=“从乙袋中取到白球”

B=“从甲袋中取到的那只球是白球”

$\overline{B}$=“从甲袋中取到的那只球是红球”

P(A)=P(B)P(A | B)+P($\overline{B}$)$P(A \mid \overline{B})$

$=\frac{n}{n+m}\cdot\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{n+m}\cdot\frac{N}{N+M+1}$

（2）设 A=“从第二盒中取到一只白球”

B_1=“从第一盒中取到的两只球都是白球”

B_2=“从第一盒中取到的两只球有一只白球一只红球”

B_3=“从第一盒中取到的两只球都是红球”

∵S={B_1,B_2,B_3}是样本空间的一个划分,

∴P(A)=P(B_1)$P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)+P(B_3)P(A \mid B_3)$

$$=\frac{C_4^2}{C_9^2}\times\frac{C_7^1}{C_{11}^1}+\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}\times\frac{C_6^1}{C_{11}^1}+\frac{C_5^2}{C_9^2}\times\frac{C_5^1}{C_{11}^1}=\frac{53}{99}=0.5354$$ （答）

20、解:设 A=“放回后仍为 MAXAM”

B_1 =“脱落 M,M” ，P(B_1)=$\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ ；P(A | B_1)=1

B_2 =“脱落 A,A” ，P(B_2)=$\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$ ；P(A | B_2)=1

B_3 =“脱落 A,X” ，P(B_3)=$\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}$ ；P(A | B_3)=$\frac{1}{2}$

B_4 =“脱落 M,X” ，P(B_4)=$\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{2}{10}$ ；P(A | B_4)=$\frac{1}{2}$

B_5 =“脱落 M,A” ，P(B_5)=$\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{4}{10}$ ；P(A | B_5)=$\frac{1}{2}$

∴P(A)=$\frac{1}{10}\times1+\frac{1}{10}\times1+\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$

21、解:设 A=“任查一人,是色盲患者”

B=“任查一人,是男人” ; $\overline{B}$=“任查一人,是女人”

∵S={$B,\overline{B}$} 是样本空间的一个划分,

∴A=AB+A$\overline{B}$

P(A)=P(B)P(A|B)+P($\overline{B}$)$P(A \mid \overline{B})=\frac{1}{2}\times$5%+$\frac{1}{2}\times$0.25%=0.2625

P(B|A)=$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.5\times0.05}{0.0625}=\frac{20}{21}=0.9524$

答:任查出一位色盲患者,此人是男人的概率是 0.9524

24、解:设 $A_i=$“第 i 次取出一个零件,是一等品” i=1,2.

$B=$“从第一箱中取出零件” ; $\overline{B}=$“从第二箱中取出零件”

(1) $A_1=A_1B+A_1\overline{B}$

P(A_1)$=P(B)P(A_1 \mid B)+P(\overline{B})P(A_1 \mid \overline{B})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{C_{10}^1}{C_{50}^1}+\frac{1}{2}\times\frac{C_{18}^1}{C_{30}^1}=\frac{2}{5}=0.4$ (答)

(2) $A_1A_2=BA_1A_2+\overline{B}A_1A_2$

P(A_1A_2)$=P(B)P(A_1A_2 \mid B)+P(\overline{B})P(A_1A_2 \mid \overline{B})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{C_{10}^1C_9^1}{C_{50}^1C_{49}^1}+\frac{1}{2}\times\frac{C_{18}^1C_{17}^1}{C_{30}^1C_{29}^1}$=0.194229

P($A_2 \mid A_1$)$=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{0.194229}{0.4}=0.4856$

25、解:设 A=“他到家的时间在 5:45——5:49”

B_1=“他乘地铁回家” ; B_2=“他乘汽车回家”

A=AB_1+AB_2

$$P(A)=P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)=\frac{1}{2}\times 0.45+\frac{1}{2}\times 0.20=0.325$$

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.45}{0.325}=\frac{9}{13}$$ （答）

26、解：（1）

设 A=“系统（1）正常工作”；

B_1=“元件①、②、③正常”；B_2=“元件①、④正常”

A=B_1+B_2

P(A)=P($B_1)+P(B_2)-P(B_1)P(B_2)=P_1P_2P_3+P_1P_4-P_1P_2P_3P_4$

解：（2）

设 A=“系统（2）正常工作”；

B_1=“元件①、②正常”　　B_2=“元件④、⑤正常”

B_3=“元件①、③、⑤正常”　　B_4=“元件④、③、②正常”

A=$B_1+B_2+B_3+B_4$

P(A)=P($B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)-P(B_1B_2)-P(B_1B_3)-P(B_1B_4)-P(B_2B_3)$

$-P(B_2B_4)-P(B_3B_4)+P(B_1B_2B_3)+P(B_1B_2B_4)+P(B_1B_3B_4)+P(B_2B_3B_4)$

$-P(B_1B_2B_3B_4)$

$=P^2+P^2+P^3+P^3-P^4-P^4-P^4-P^4-P^4-P^5+P^5+P^5+P^5+P^5-P^5$

$=2P^2+2P^3-5P^4+2P^5$

27、解：（1）设 A=“电路闭合并发出警报”

B_1=“开关 B_1 闭合”；P(B_1)=0.96

B_2=“开关 B_2 闭合”；P(B_2)=0.96

$P(A)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1)P(B_2)$=0.96+0.96−0.96×0.96=0.9984

（2）假设有 n 个开关并联，使电路闭合的可靠性至少为 0.9999

并设 B_i=“开关 B_i 闭合”　则

$A=B_1+B_2+\cdots+B_n$ ； $\overline{A}=\overline{B}_1\overline{B}_2\cdots\overline{B}_n$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)\cdots P(\overline{B}_n)=1-(1-0.96)^n=1-0.04^n$$

依题意 P(A)≥0.9999 ， 即 $1-0.04^n$ ≥0.9999

解得 n≥2.86≈3 答：至少需要 3 只开关并联。

28、解Ⅰ：设 A=“三人中至少有一人能破译密码”

Bi=“第 i 人能破译密码” i=1,2,3.

已知 $P(B_1)=\frac{1}{5}$ ； $P(B_2)=\frac{1}{3}$ ； $P(B_3)=\frac{1}{4}$.

$$P(A)=P(B_1+B_2+B_3)$$

$$=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)-P(B_1B_2)-P(B_1B_3)-P(B_2B_3)+P(B_1B_2B_3)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{5}$$

解Ⅱ：$\overline{A}$=“三人都不能破译密码” 则 $\overline{A}=\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)=1-P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)$$

$$=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{5}$$