第二章 随机变量及其分布答案

1、解：设 X 为取出 3 只球中的最大号码，则 X 的可取值为 3、4、5.

$P\{X=3\}=\frac{C_1^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$ ； $P\{X=4\}=\frac{C_1^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$ ； $P\{X=5\}=\frac{C_1^1C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$

$$\therefore \quad X \backsim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix}$$

2、解：X 为两次抛掷骰子所得小的点数，则 X=1、2、3、4、5、6.

P{X=K}=P“两次都得点数 K”+P“一次得 K 点，另一次得点数大于 K”

$$=\frac{1^2}{6^2}+\frac{[C_1^1C_{6-K}^1]\cdot P_2^2}{6^2}=\frac{1}{36}+\frac{(6-K)\times 2}{36}=\frac{13-2K}{36}$$

$\therefore$ X $\backsim$ $P\{X=K\}=\frac{13-2k}{36}$ $\quad k=1,2,3,4,5,6.$

$$X \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

3、解：X 的可取值为 0、1、2. 则 X $\backsim$ $P\{X=K\}=\frac{C_2^kC_{13}^{3-K}}{C_{15}^3}$ $\quad k=0,1,2.$

$$或\ X \backsim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{22}{35} & \frac{12}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix}$$

4、解：（1）X 的可取值为 1、2、3、…

则 X $\backsim$ P{X=K}=P“第 k 次才成功”$=P(1-P)^{K-1}$ $\quad k=1,2,3,\ldots$

（2）Y 的可值为 r,r+1,t+2,…

Y ∽ P{Y=K}=P“第 k 次试验才成功 r 次 ”

=P“前 k-1 次试验成功了 r-1 次,第 k 次必成功”

$= C_{k-1}^{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)} \cdot p = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

∴Y ∽ P{Y=K} $= C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ K=r,r+1,r+2,…

（3）X 的可取值为 1、2、3、…则 X ∽ P{X=K}= 0.45 $\times (0.55)^{k-1}$ $k = 1, 2, 3, \cdots$

P“X 取偶数”=P{ $\sum_{k=1}^{n} [X = 2K]$ }= $\sum_{k=1}^{n} P[X = 2K]$

$= \sum_{k=1}^{n} 0.45 \times (0.55)^{2k-1} = \frac{0.45}{0.55} \sum_{k=1}^{n} [(0.55)^2]^k = \frac{0.45}{0.55} \times \frac{(0.55)^2}{1-(0.55)^2} = \frac{11}{31}$

6、解：已知 P=0.1 ，q=0.9 ，n=5 设被使用的供水设备为 X 个，则

X ∽ P{X=K}= $C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k}$ $k = 0.1, 2, 3, 4, 5.$

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是 P{X=2}= $C_5^2 (0.1)^2 (0.9)^3$ =0.0729

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是 P{X≥3}=…=0.00856

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是 P{X≤3}=…=0.99954

（4）至少有 1 个设备被使用的概率是 P{X≥1}=1−P{X=0}=…=0.40951

7、解：设在 n 次重复试验中 A 发生 X 次，则 X ∽ P{X=K}= $C_n^k (0.3)^k (0.7)^{n-k}$

（1）n=5 时，则 X ∽ P{X=K}= $C_5^k (0.3)^k (0.7)^{5-k}$ $k = 0.1, 2, 3.4, 5.$

∴指示灯发出信号的概率为

P{X≥3}=P{X=3}+P{X=4}+P{X=5}=…=0.16308

（2）n=7 时，则 X ∽ P{X=K}=$C_7^k(0.3)^k(0.7)^{7-k}$ $k=0,1,2,3,4,5,6,7.$

∴指示灯发出信号的概率为
P{X≥3}=1- P{X=0}- P{X=1}- P{X=2}=…=0.353

9、解：设第一次抽取 10 个产品中有 X 个次品，则 X ∽ b(10,0.1)

设第二次抽取 5 个产品中有 Y 个次品，则 Y ∽ b(5,0.1)

（1）第一次检验就能接受的概率为

P{X=0}=$C_{10}^0(0.1)^0(0.9)^{10}=0.349$

（2）需作第二次检验的概率为

P{1≤X≤2}=P{X=1}+P{X=2}=$C_{10}^1(0.1)^1(0.9)^9+C_{10}^2(0.1)^2(0.9)^8$=0.581

（3）第二次检验能接受的概率为

P{Y=0}=$C_5^0(0.1)^0(0.9)^5=0.590$

(4）第一次检验未决定，而第二次检验被接受的概率为

P{[1≤X≤2]·[Y=0]}=0.581×0.590=0.343

(5) 这批产品被接受的概率为
P{X=0}+P{1≤X≤2}·P{Y=0}=0.349+0.343=0.692

10、解：（1）设 A=“某人试验一次成功”

n=$C_8^4=70,\quad K(A)=1$ ∴P(A)=$\frac{1}{70}$ （答）

（2）∵P(A)= $\frac{1}{70}$ ，P($\overline{A}$)$=1-\frac{1}{70}=\frac{69}{70}$

∴某人试验 10 次，成功 3 次的概率按贝努里定理得

P{X=3}=$C_{10}^3(\frac{1}{70})^3(\frac{69}{70})^7=3.16\times10^{-4}=0.000316$

这个概率很小，说明{X=3}是一个小概率事件，在一次实验中是不会

发生的，但此人在 10 次试验中成功了 3 次，说明此人是有区分能力的。

12、解：设电话总机每分钟接到呼唤次数为 X ，则

X $\backsim$ $P\{X=K\}=\frac{4^k}{k!}e^{-4} \qquad k=0,1,2,\text{L}$

（1）某一分钟恰有 8 次呼唤的概率为 $P\{X=8\}=\frac{4^8}{8!}e^{-4}=0.02978$

（2）某一分钟的呼唤次数大于 3 的概率为

$P\{X>3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}-P\{X=3\}$

$=1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4^1}{1!}e^{-4}-\frac{4^2}{2!}e^{-4}-\frac{4^3}{3!}e^{-4}=0.5663$

13、解：已知 X $\backsim$ $\pi(\frac{t}{2})$ 即 X $\backsim$ $P\{X=K\}=\frac{(\frac{t}{2})^k}{k!}e^{-\frac{t}{2}} \qquad k=0,1,2,\text{L}$

（1）当 t=15−12=3 时， X $\backsim$ $P\{X=K\}=\frac{(\frac{3}{2})^k}{k!}e^{-\frac{3}{2}} \qquad k=0,1,2,\text{L}$

所求概率为 $P\{X=0\}=\frac{(\frac{3}{2})^0}{0!}e^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}=0.2231$

（2）当 t=17−12=5 时 X $\backsim$ $P\{X=K\}=\frac{(\frac{5}{2})^k}{k!}e^{-\frac{5}{2}} \qquad k=0,1,2,\text{L}$

所求概率为 $P\{X\geqslant1\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{(\frac{5}{2})^0}{0!}e^{-\frac{5}{2}}=1-e^{-\frac{5}{2}}=0.9179$

X $\backsim$ $P\{X=K\}=C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k} \qquad k=0.1,2,3,4,5.$

14、解：（1）∵ X $\backsim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P & P \end{pmatrix}$ ∴ $F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < +\infty \end{cases}$

（2）69 页第 1 题，从 5 个球中任取 3 个，求最大号码 X 的分布函数。

已求得 X $\backsim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 3 \\ \frac{1}{10} & 3 \le x < 4 \\ \frac{4}{10} & 4 \le x < 5 \\ 1 & 5 \le x < +\infty \end{cases}$$

15、解：由定义 $F(x)=P\{X \le x\}$

当 $x<0$ 时　　$F(x)=P\{X \le x\}=P(\phi)=0$

当 $0 \le x \le a$ 时，　$F(x)=kx$ ，　　取 $x=a$, 得 $F(a)=ka$

当 $a \le x < +\infty$ 时，$F(x)=P\{X \le x\}=P(S)=1$　　取 $x=a$, 得 $F(a)=1$

∴ $ka=1$ ，得 $k=\frac{1}{a}$ ，故得分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{x}{a} & 0 \le x < a \\ 1 & a \le x < +\infty \end{cases}$

16、解：∵ $F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-0.4x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

∴P{至多 3 分钟}=P{X≤3}=F（3）=$1-e^{-1.2}$

P{至少 4 分钟}=P{X≥4}=1−P{X< 4}=1−F（4）=1−[1−$e^{-1.6}$]$=e^{-1.6}$

P{3 分钟至 4 分钟之间}=P{3≤X≤4}=F(4)−F(3)=$e^{-1.2}-e^{-1.6}$

P{至多 3 分钟或至少 4 分钟}=P{X≤3}+P{X≥4}=1−$e^{-1.2}+e^{-1.6}$

P{恰好 2.5 分钟}=P{X=2.5}=0

18、解：已知 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$　　$\because F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当$-\infty<x<0$时，　　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

当$0\le x<1$ 时，　　$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} tdt=\frac{1}{2}x^2$

当 $1\le x<2$时，　　$F(x)=\int_{0}^{1} tdt+\int_{1}^{x} (2-t)dt=-\frac{x^2}{2}+2x-1$

当$2\le x<+\infty$，　　$F(x)=1$

$$\therefore \quad F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty<x<0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1 \\ -\frac{x^2}{2}+2x-1 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x<+\infty \end{cases}$$

20、解：已知任一器件寿命 X（小时）∽ $f(x)=\begin{cases} \frac{1000}{x^2} & x>1000 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$$\therefore \quad P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1500}^{+\infty} \frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3}$$

任取 5 只器件，设寿命大于 1500 小时的只数为 Y ，则 Y ∽ b(5, $\frac{2}{3}$)

所求概率为 P{Y≥2}=1- P{Y=0}- P{Y=1}=1- $C_5^0(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^5-C_5^1(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^4=\frac{232}{243}$

21、解：已知顾客等待服务的时间 X（分）∽ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

P{X >10}= $\int_{10}^{+\infty}f(x)dx=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=e^{-2}$

已设 Y 为某顾客未等到服务时间而离开的次数，则 Y ∽ b(5, e^{-2})

即 Y ∽ P{Y=K}= $C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-k})^{5-k}\qquad k=0,1,2,3,4,5.$

∴P{Y≥1}=1- P{Y=0}=1- $C_5^0(e^{-2})^0(1-e^{-2})^5=1-(1-e^{-2})^5=0.5167$

22、解：已知 K ∽ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & 0\le x\le 5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

P{方程有实根}=P{ $\Delta\ge 0\}=\mathrm{P}\{(4k)^2-4\times 4(k+2)\ge 0\}$ =P{k≥2}+P{k≤-1}

= $\int_{2}^{+\infty}f(x)dx=\int_{2}^{5}\frac{1}{5}dx=\frac{3}{5}$

23、解：（1）P{2<X≤5}= $\phi(\frac{5-3}{2})-\phi(\frac{2-3}{2})=\phi(1)-\phi(-0.5)=0.5328$

P{-4<X≤10}= $\phi(\frac{10-3}{2})-\phi(\frac{-4-3}{2})=\phi(3.5)-\phi(-3.5)=0.9996$

P{ $|X|>2\}=P\{X>2\text{或}X<-2\}=P\{2<X<+\infty\}+P\{-\infty<X<-2\}$

$=\phi(+\infty)-\phi(\frac{2-3}{2})+\phi(\frac{-2-3}{2})-\phi(-\infty)=0.6997$

P{X＞ 3}=P{3＜ X ＜+ ∞}= $\phi(+\infty)-\phi(\frac{3-3}{2})=0.5$

（2）求 c,使 P{X >c}=P{X≤c}

$P\{c<X<+\infty\} = P\{-\infty < X \le c\}$

$$\phi(+\infty)-\phi(\frac{c-3}{2})=\phi(\frac{c-3}{2})-\phi(-\infty)$$

$$\phi(\frac{c-3}{2})=0.5 \Leftrightarrow \frac{c-3}{2}=0 \Leftrightarrow c=3$$

（3）∵P{X>d}≥0.9　即 P{d<X<+∞}≥0.9

$\therefore \phi(+\infty)-\phi(\frac{d-3}{2}) \geqslant 0.9$

$\phi(\frac{d-3}{2}) \leqslant 0.1$ (正态分布数值表没有 0.1，说明 $\frac{d-3}{2}$ 是负数)

$\therefore 1-\phi(\frac{3-d}{2}) \leqslant 0.1$

$\phi(\frac{3-d}{2}) \geqslant 0.9$

$$\frac{3-d}{2}=1.28+(1.29-1.28)\times\frac{0.9000-0.8997}{0.9015-0.8997}=1.28+0.01\times\frac{3}{18}=1.2817$$

∴d ≤ 0.4364　即 d 得最大值为 0.4364

24、解：设某地区女青年的血压（收缩压）为 X（mm）,已知 X ∽ N(110, 12^2）

(1) $P\{X\leqslant 105\}=\phi(\frac{105-110}{12})=\phi(-0.4167)=1-\phi(0.4167)=0.3384$

(2) $P\{100<X\leqslant 120\}=\phi(\frac{120-110}{12})-\phi(\frac{100-110}{12})=\phi(0.8333)-\phi(-0.8333)$

$=2\phi(0.8333)-1=0.5952$

(3) ∵P{X> x}≤0.05　即 P{$x<X<+\infty$}≤0.05

$\therefore 1-\phi(\frac{x-100}{12}) \leqslant 0.05 \Rightarrow \phi(\frac{x-100}{12}) \ge 0.95 \Rightarrow \frac{x-100}{12} \ge 1.645$

故得 $x \ge 129.74$

25、解：设螺栓长度为 X （cm）,已知 X ∽ N（10.05，0.06^2)

∴螺栓长度合格的概率为

$P\{10.05-0.12<X<10.05+0.12\}=\phi(\frac{10.05+0.12-10.05}{0.06})-\phi(\frac{10.05-0.12-10.05}{0.06})$

$=\phi(2)-\phi(-2)=2\phi(2)-1=0.9544$

故螺栓长度不合格的概率为 P=1-0.9544=0.0456

26、解：∵P{120<X≤200}≥0.80

$$\therefore \phi(\frac{200-160}{\sigma})-\phi(\frac{120-160}{\sigma}) \geqslant 0.80$$

$$2\phi(\frac{40}{\sigma})-1 \geqslant 0.80$$

$$\phi(\frac{40}{\sigma}) \geqslant 0.90$$

$$\frac{40}{\sigma} \geqslant 1.282$$

$$\sigma \leqslant 31.20$$

27、解：已知 X ∽ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$ 求 $Y=X^2$ 的分布列。

当 X= -2 、 -1 、 0 、1 、3 时

Y= 4 、 1 、 0 、1 、9

∴ Y= X^2 的可取值为 0、1、4、9.

P{Y=0}=P{X=0}= $\frac{1}{5}$

P{Y=1}=P{X= -1}+P{X=1}= $\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$

P{Y=4}=P{X= -2}= $\frac{1}{5}$

P{Y=9}=P{X=3}= $\frac{11}{30}$

∴Y= X^2 ∽ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{30} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$

28、解：已知 X ∽ $f(x)=\begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度

$F_Y(y)= P\{Y\le y\}= P\{e^X\le$

当 y ≤0 时， $F_Y(y)=P\{e^X \le y\}=P(\phi)=0$

当 $y>0$ 时， $F_Y(y)=P\{e^X \le y\}=P\{X \le \ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx$

$$=\begin{cases} 0 & \ln y<0 \\ \int_0^{\ln y} dx & 0\le \ln y<1 \\ 1 & 1\le \ln y<+\infty \end{cases} =\begin{cases} 0 & 0\le y<1 \\ \ln y & 1\le y<e \\ 1 & e\le y<+\infty \end{cases}$$

$$\therefore\ f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y} & 1<y<e \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

29、解：已知 X $\backsim$ $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$，

（1）求 Y= e^x 的分布密度。

$\because F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^x\le y\}$

当 $y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{e^x\le y\}=P(\phi)=0$ $\quad\therefore f_Y(y)=0$

当 $y>0$时，$F_Y(y)=P\{e^x\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$\therefore f_Y(y)=[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx]'=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$

（3）求 $Y=|X|$ 的分布密度

$\because F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$

当 $y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P(\phi)=0$

当 $y>0$时，$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y<X<y\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}+e^{-\frac{y^2}{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y}{}}$$

$\therefore Y=|X|$ 的分布密度是

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

30、解：（1）已知 X $\backsim$ $f(x)$ $\quad -\infty<x<+\infty$ $\quad$ 求 $Y=X^3$ 的分布密度。

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}=P\{X\le\sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} \quad ($$

$$\therefore f_Y(y)=F_Y{}'(y)=f(\sqrt[3]{y})\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\cdot f(\sqrt[3]{y})$$ （当 $y\ne 0$ ）

即 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\cdot f(\sqrt[3]{y}) & y\ne 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

（2）已知 X $\backsim$ $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 求 $Y=X^2$ 的概率密度。

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le$$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P(\phi)=0 \quad \Rightarrow f_Y(y)=$ (

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{|X|\le\sqrt{y}\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx=\int_0^{\sqrt{y}} e^{-x}dx$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} & y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$