第四章　随机变量的数字特征答案

2、解：设每次检验 10 个产品中的次品数为 Y， 则 Y ∽ b(10,0.1)

于是，次品数多于 1 的概率为

$$P\{Y>1\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-C_{10}^{0}(0.1)^{0}(0.9)^{10}-C_{10}^{1}(0.1)^{1}(0.9)^{9}$$

$=0.2639$

已设 4 次检验中，需要调整设备的次数为 X，则 X ∽ b(4,0.2639)

而 X 的可取值为 0、1、2、3、4.

$P\{X=0\}=C_4^0(0.2639)^0(0.7361)^4=0.2936$

$P\{X=1\}=C_4^1(0.2639)^1(0.7361)^3=0.4210$

$P\{X=2\}=C_4^2(0.2639)^2(0.7361)^2=0.2264$

$P\{X=3\}=C_4^3(0.2639)^3(0.7361)^1=0.0541$

$P\{X=4\}=C_4^4(0.2639)^4(0.7361)^0=0.0049$

$\therefore E(X)=0\times0.2936+1\times0.4210+2\times0.2264+3\times0.0541+4\times0.0049$

$=1.0557$

5、解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{1500}x\frac{x}{1500^2}dx+\int_{1500}^{3000}x[\frac{-1}{1500^2}(x-3000)]dx$

$$=\frac{1}{1500^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1500}+\frac{1}{1500^2}[-\frac{x^3}{3}+3000\times\frac{x^2}{2}]\Big|_{x=1500}^{x=3000}=1500\text{（分）}$$

6、解：已知 X ∽ $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$

$E(X)=-2\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$

$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=$

$E(3X^2+5)=[3(-2)^2+5]\times0.4+[3\times0^2+5]\times0.3+[3\times2^2+5]\times0.3=$

7、解：已知 X ∽ $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（1）$E(Y)=E(2X)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=2\Gamma(1)=2$

（2）E(Y)=E(e^{-2X}) $=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\cdot e^{-x}\cdot dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$

8、解：由已知，得（X，Y）的联合密度与边缘密度是

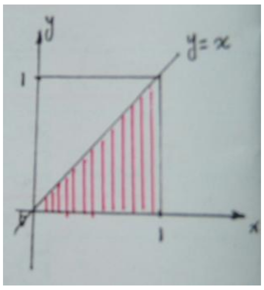
Y \ X	1	2	3	P{Y= y_j}
-1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
P{X= x_i }	0.4	0.2	0.4	1

(3) $E\{(X-Y)^2\}=(1+1)^2\times 0.2+(2+1)^2\times 0.1+(3+1)^2\times ($

$+(1-0)^2\times 0.1+(2-0)^2\times 0+(3-0)^2\times 0.3$

$+(1-1)^2\times 0.1+(2-1)^2\times 0.1+(3-1)^2\times 0.1=5$

9、　解：已知 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



E(X)=L　　　　　　E(Y)=L　　　　　　E(XY)=L

$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)12y^2dy$

$=12\int_0^1 dx\int_0^x (x^2y^2+y^4)dy=\frac{16}{15}$

10、解：已知每台设备的寿命 X $\sim$ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

∴每一台设备售出一年被调换的概率为

P= $P\{X<1\}=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-\frac{1}{4}}$

设出售一台设备净赢利 Y 元，由已知条件（若一年内被调换，则亏 200 元，若不被调换，则赚 100 元），于是，Y 服从两点分布。

$\therefore$ Y $\backsim$ $\begin{pmatrix} -200 & 100 \\ 1-e^{-\frac{1}{4}} & e^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$ 故 $E(Y)=-200\times(1-e^{-\frac{1}{4}})+100\times e^{-\frac{1}{4}}$=33.64 元

答;售出每台设备期望获利 33.64 元

12、解：已知电压 X $\backsim$ N（0，1），即 $f_X(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{18}}$ $(-\infty<x<+\infty)$

检波器输出电压为 $Y=5X^2$

$$\therefore E(Y)=E(5X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}5x^2\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{18}}dx=\frac{10}{3\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{18}}dx$$

令 $\frac{x^2}{18}=t$, 则 $x^2=18t, x=3\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}, dx=\frac{3\sqrt{2}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$

当 $x=0$ 时, $t=0$, 当 $x\to+\infty$ 时, $t\to+\infty$

$$\therefore E(Y)=\frac{10}{3\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}18te^{-t}\frac{3\sqrt{2}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{3}{2})$$

$$=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}=45$$ （v）

13、解： $\because f_{X_1}(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$ ； $f_{X_2}(x)=\begin{cases}4e^{-4x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$\therefore E(X_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X_1}(x)dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx=\int_0^{+\infty}te^{-t}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore E(X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X_2}(x)dx=\int_0^{+\infty}4xe^{-4x}dx=\int_0^{+\infty}te^{-t}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\Gamma(2)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore E(X_2^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_{X_2}(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2 4e^{-4x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}t^2e^{-t}\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{16}\Gamma(3)=\frac{1}{8}$$

（1） $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

（2）若 X_1 与 X_2 独立，则

$E(X_1\cdot X_2)=E(X_1)E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

14、解：设 X 为总的配对数，则 X 的可取值为 0、1、2、…、n.

令 $X_i=\begin{cases}1 & 第i号球恰进入第i号盒子\\ 0 & 第i号球不进入第i号盒子\end{cases}$

则 X= $X_1+X_2+\cdots+X_n$.

但 $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ $\quad E(X_i)=0\times(1-\frac{1}{n})+1\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$

$\therefore E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=n\times\frac{1}{n}=1$

答：球的号数与盒子号数相同的配对数的期望值为 1 对。

15、 解：设试开次数为 X，

（1）写出分布列——∵X $\sim$ $P\{X=k\}=\frac{1}{n}$ k=1,2,…,n. （抽签问题）

$$\therefore E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

（2）不写分布列——引入随机变量如下

$X_1=1$（第 1 次试开成功）；

$$X_k=\begin{cases}1 & \text{前k−1次试开均不成功} \\ 0 & \text{前k−1次试开有一次成功}\end{cases} \qquad k=2,3,4,\ldots,n.$$

则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

$\because E(X_1)=1\cdot P\{X_1=1\}=1$

$$E\{X_k\}=1\times P\{X_k=1\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$

$$=P(\overline{A}_1)P\{\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_{k-1}|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-2})$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}$$ （利用古典定义）

$$=\frac{n-k+1}{n}$$

$$\therefore E(X)=E(X_1)+E(\sum_{k=2}^{n}X_k)=E(X_1)+\sum_{k=2}^{n}E(X_k)=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n-k+1}{n}$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}[\frac{n+1}{n}-\frac{k}{n}]=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n+1}{n}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{n}=1+\frac{n+1}{n}\sum_{k=2}^{n}1-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}k$$

$$=1+\frac{n+1}{n}(n-1)-\frac{1}{n}[\frac{n(n+1)}{2}-1]=\frac{n+1}{2}$$ （次）

16、证明：$E\{[X-C]^2\}=E\{X^2-2CX+C^2\}=E(X^2)-2CE(X)+C^2$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2+[E(X)]^2-2CE(X)+C^2$$

$$=D(X)+[E(X)-C]^2\geq D(X)$$

∴ 当 $C\neq E(X)$ 时， $D(X)<E\{[X-C]^2\}$

当 $C=E(X)$ 时， $D(X)=E\{[X-C]^2\}$

17、解：∵X ∽ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$\therefore E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

令 $\dfrac{x^2}{2\sigma^2}=t$ 则 $x^2=2\sigma^2t$ $x=\sqrt{2}\,\sigma t^{\frac{1}{2}}$ $dx=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sigma t^{-\frac{1}{2}}dt$

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{2\sigma^2t}{\sigma^2}e^{-t}\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma t^{-\frac{1}{2}}dt=\sqrt{2}\sigma\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{2}\sigma\Gamma(\frac{3}{2})=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\cdots=2\sigma\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=2\sigma$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\sigma^2-(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma)^2=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

20、解：设长方形的高为 X，周长为 20，长为 10-X，则其面积为

A=X（10-X）

∵ X ∽ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$\therefore E(A)=E[X(10-X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(10-x)f(x)dx=\int_0^2 x(10-x)\frac{1}{2}dx=8.67\ (㎡)$$

$$E(A^2)=E\{[X(10-X)]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(10-x)^2f(x)dx=\int_0^2 x^2(10-x)^2\frac{1}{2}dx=96.53$$

$$D(X)=96.53-(8.67)^2=21.42(m^2)$$

22、解：设 5 家商店两周的总销售量为 Y（公斤），则 Y= $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$

（1） $E(Y)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)+E(X_5)$

$=200+240+180+260+320=1200$

$D(Y)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)+D(X_5)$

$=225+240+225+265+270=35^2$

（2）设库存 n 公斤产品，为使商品不脱销的概率大于 0.99，则需

$$P\{Y\le n\}>0.99$$

$$P\{\frac{Y-1200}{35}\le\frac{n-1200}{35}\}>0.99$$

$$\Phi(\frac{n-1200}{35})>0.99$$

$$\frac{n-1200}{35}>2.33$$

$$n>1281.55$$ （公斤）

答：至少要库存 1282 公斤这类产品。

23、解：设装 n 袋水泥，求满足条件的 n 的最大值。已知各袋重量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(50,2.5^2)$，于是，n 袋水泥总重量 Y 也必然服从正态分布，即 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N(50n,2.5^2n)$，依题意，有

$$P\{Y>2000\}\le 0.05$$

$$P\{\frac{Y-50n}{2.5\sqrt{n}}>\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\}\le 0.05$$

$$1-\Phi(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}})\le 0.05$$

$$\Phi(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}})\ge 0.95$$

$$\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\ge 1.645$$

解得 $\sqrt{n}\le 6.2836$ $n\le 39.48$ 取 $n\le 39$

答：至多装 39 袋水泥。

24、解：已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}y\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy$

$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\le 1}r^2\cos\theta\sin\theta\cdot rdrd\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 r^3dr=0$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

∴X 与 Y 不相关。

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & |x|\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

当 $x^2+y^2\le 1$ 时， $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，

∴X 与 Y 不独立。

26、 解: 由已知得：X ∽ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\overline{A}) & P(A)\end{pmatrix}$ ； Y ∽ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\overline{B}) & P(B)\end{pmatrix}$

XY 的可取值为 0、1． 且

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P(AB)$ ； $P\{XY=0\}=1-P(AB)$

∴XY ∽ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-P(AB) & P(AB)\end{pmatrix}$

∴ $E(X)=P(A)$; $E(Y)=P(B)$; $E(XY)=P(AB)$

如果 X 与 Y 不相关，则 $\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \operatorname{cov}(x,y)=0\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B) \Leftrightarrow$ A与B相互独立

∴A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立，

∴ $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}$

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\}$

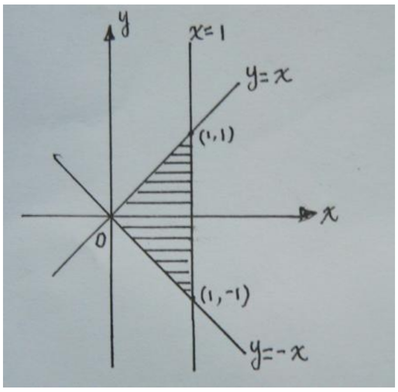
$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\}$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$

故 X 与 Y 相互独立（联合分布列等于边缘分布列的相乘积）

说明：当 X 与 Y 不相关时，它们可能独立

27、解：已知 $f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



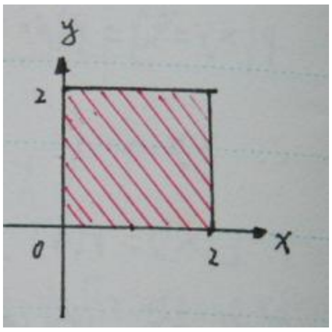
$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}x\,dy=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}y\,dy=0$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xy\,dy=0$

∴ $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-\frac{2}{3}\times 0=0$

28、解：已知 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & 0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$



$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2 xdx\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(Y)=\cdots\cdots=\frac{7}{6}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^2 x^2dx\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{5}{3}$$

$$E(Y^2)=\cdots\cdots=\frac{5}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 xdx\int_0^2\frac{1}{8}y(x+y)dy=\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})$$

29、解：$\because X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ； $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\therefore E(X)=E(Y)=\mu,\quad D(X)=D(Y)=\sigma^2$

$\because Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$

$\therefore E(Z_1)=\alpha E(X)+\beta E(Y)=(\alpha+\beta)\mu$

$E(Z_2)=\alpha E(X)-\beta E(Y)=(\alpha-\beta)\mu$

$D(Z_1)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$

$D(Z_2)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$

$$E(Z_1Z_2)=E[(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)]=E[\alpha^2X^2-\beta^2Y^2]$$

$$=\alpha^2E(X^2)-\beta^2E(Y^2)=\alpha^2\{D(X)+[E(X)]^2\}-\beta^2\{D(Y)+[E(Y)]^2\}$$

$$=\alpha^2(\sigma^2+\mu^2)-\beta^2(\sigma^2+\mu^2)=(\sigma^2+\mu^2)(\alpha^2-\beta^2)$$

$$\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)$$

$$=(\sigma^2+\mu^2)(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha+\beta)\mu(\alpha-\beta)\mu=\sigma^2(\alpha^2-\beta^2)$$

$$\therefore \rho_{Z_1Z_2}=\frac{\operatorname{cov}(z_1,z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{\sigma^2(\alpha^2-\beta^2)}{\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

30、解：（1） $E(w)=E[(aX+bY)^2]=E[a^2X^2+6aXY+9Y^2]$

$$=a^2E(X^2)+6aE(XY)+9E(Y^2)$$

$\because E(X)=E(Y)=0$， $D(X)=4$， $D(Y)=16$， $\rho_{XY}=-0.5$

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4+0^2=4$$

$$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=16+0^2=16$$

$$E(XY)=\operatorname{cov}(X,Y)+E(X)E(Y)=\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=-0.5\times\sqrt{4}\times\sqrt{16}=-4$$

$$\therefore E(w)=4a^2-24a+144=4(a-3)^2+108$$

当 $a=3$ 时， $E(w)$ 取最小值 108.

（2） 已知 X，Y 都是正态变量，且 D(X)= σ_X^2 ； $D(Y)=\sigma_Y^2$

$\therefore W=X-aY$ $V=X+aY$ 也是正态变量

要证当 $a^2=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 时，W 与 V 相互独立，需证 W 与 V 不相关。即需证 $\operatorname{cov}(W,V)=0$

但 $\operatorname{cov}(W,V)=E(WV)-E(W)E(V)$

$$=E\{(X-aY)(X+aY)\}-E(X-aY)E(X+aY)$$

$$=E[X^2-a^2Y^2]-[E(X)-aE(Y)]\cdot[E(X)+aE(Y)]$$

$$=E(X^2)-a^2E(Y^2)-[E(X)]^2+a^2[E(Y)]^2$$

$$=D(X)-a^2D(Y)=\sigma_X^2-a^2\sigma_Y^2$$

当 $a^2=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 时，$\operatorname{cov}(W,V)=\sigma_X^2-\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\sigma_Y^2=0$

故 W 与 V 不相关，也就相互独立。

32、解：设每毫升血液含白细胞数为 X，由车比雪夫不等式，得

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{\sqrt{D(X)}}{\varepsilon^2}$$

已知 $E(X)=7300$，$\sqrt{D(X)}=700$

$$P\{5200<X<9400\}=P\{5200-7300<X-7300<9400-7300\}$$

$$=P\{-2100<X-7300<2100\}=P\{|X-7300|<2100\}$$

$$\ge 1-\frac{700^2}{2100^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

答：所求概率不小于 $\dfrac{8}{9}$

33、证明：（1）若 $E(V^2)=0$

$$\therefore\ 0=E(V^2)=D(V)+[E(V)]^2\Leftrightarrow\begin{cases}D(V)=0\\E(V)=0\end{cases}$$

$\therefore$ 由方差性质（4），得 $P\{V=0\}=P\{V=E(V)\}=1$

故 $P\{VW=0\}=1$ 式子的等号成立。

（2）若 $E(W^2)=0$ ， 同理证明式子的等号成立。

（3）若 $E(V^2)>0$，$E(W^2)>0$ ， 考虑实变量 t 的函数

$$q(t)=E[(V+tW)^2]=E[V^2+2tVW+t^2W^2]$$

$$=E(V^2)+2tE(VW)+t^2E(W^2)$$

显然，$q(t)$是 t 的一元二次函数，由于$E(W^2)>0$ ，$q(t)>0$

$\therefore \Delta=[2E(VW)]^2-4E(V^2)\cdot E(W^2)<0$

即 $[E(VW)]^2\le E(V^2)\cdot E(W^2)$ 成立

综上所述，原不等式成立。