第五章　大数定律及中心极限定理答案

2、解：设 每部份长度为 X_k（mm）, k=1,2,…,10. 显然 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，

且 $E(X_k)=2(mm)$， $\sqrt{D(X_k)}=0.05(mm)$

设总长度为 $X=\sum_{k=1}^{10} X_k$ 　则由中心极限定理 4， $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \sim$ N(0,1)

$\because E(X)=\sum_{k=1}^{10} E(X_k)=10\times 2=20(mm)$；

$D(X)=\sum_{k=1}^{10} D(X_k)=10\times 0.05^2=0.025$ ； $\sqrt{D(X)}=\sqrt{0.025}=0.158$

$\therefore \frac{X-20}{0.158} \sim$ N(0,1) ， 故产品合格的概率为：

P{ 产品合格}= $P\{20-0.1<X<20+0.1\}=P\{-0.1<X-20<0.1\}$

$=P\{\frac{-0.1}{0.158}<\frac{X-20}{0.158}<\frac{0.1}{0.158}\}=P\{-1.63<X^*<1.63\}$

$=2\Phi(1.63)-1=0.4714$

3、解：设第 k 个加数的舍入误差为 X_K， $k=1,2,\cdots,1500.$

已知 $X_k \sim f(x)=\begin{cases}1 & -0.5<x<0.5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$\therefore E(X_k)=\frac{-0.5+0.5}{2}=0$; $D(X_k)=\frac{(0.5+0.5)^2}{12}=\frac{1}{12}$

（1）设总误差为 $X=\sum_{k=1}^{1500} X_k$ ，则由中心极限定理 6， $\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \sim$ N(0,1)

$E(X)=E(\sum_{k=1}^{1500} X_k)=\sum_{k=1}^{1500} E(X_k)=1500\times 0=0$

$D(X)=D(\sum_{k=1}^{1500} X_k)=\sum_{k=1}^{1500} D(X_k)=1500\times\frac{1}{12}=125$ ， $\sqrt{D(X)}=5\sqrt{5}$

$\therefore \frac{X-0}{5\sqrt{5}} \backsim N(0,1)$

$\therefore P\{|X|>15\}=1-P\{|X|\leq 15\}=1-P\{-15\leq X\leq 15\}$

$=1-P\{\frac{-15-0}{5\sqrt{5}}\leq X^{*}\leq\frac{15-0}{5\sqrt{5}}\}=1-[\Phi(\frac{3\sqrt{5}}{5})-\Phi(-\frac{3\sqrt{5}}{5})]$

$=2-2\Phi(1.34)=0.1802$

（2）设有 n 个数相加，使得总误差为 $Y=\sum_{k=1}^{n}X_k$ ，求 n 的最大值。

由中心极限定理 6，$\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \backsim N(0,1)$

$\because E(Y)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=n\times 0=0$; $D(Y)=\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{n}{12}$; $\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{n}{12}}$

$\frac{Y}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \backsim$ N（0，1），于是依题意得不等式：

$P\{|Y|<10\}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P\{-10<Y<10\}$ (

$\Leftrightarrow \quad P\{\frac{-10}{\sqrt{\frac{n}{10}}}<Y^{*}<\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{10}}}\}\geq 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad 2\Phi(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}})-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \Phi(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}})\geq 0.$ 解之得 $n\leq 443$

答：最多可有 443 个数相加。

6、解：设第 k 只蛋糕的价格为 X_K 元，$k=1,2,\cdots,300$. 则 $X_1,X_2,\cdots,X_{300}$ 相互独立，且由已知得 $E(X_k)=1\times 0.3+1.2\times 0.2+1.5\times 0.5=1.29$

$E(X_k^2)=1^2\times 0.3+1.2^2\times 0.2+1.5^2\times 0.5=1.713$

$D(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=1.713-1.29^2$

（1）设总收入为 $X=\sum_{k=1}^{300}X_k$ ，则由中心极限定理 4，$\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \backsim$ N(0,1)

但 $E(X)=E(\sum_{k=1}^{300}X_k)=\sum_{k=1}^{300}E(X_k)=300\times1.29=387$

$D(X)=D(\sum_{k=1}^{300}X_k)=\sum_{k=1}^{300}D(X_k)=300\times0.0489=14.67$ ；

$\sqrt{D(X)}=\sqrt{14.67}=3.83$　　∴ $\frac{X-387}{3.89}\sim$ N（0，1），

故收入至少 400 元的概率为

$P\{X\geq 400\}=P\{400\leq X<+\infty\}=P\{\frac{400-387}{3.83}\leq\frac{X-387}{3.83}<+\infty\}$

$=1-\Phi(3.39)=1-0.9997=0.0003$　（答）

（2）设售出价格为 1.2 元的蛋糕只数为 Y ，则 $Y\sim b(300,0.2)$

由中心极限定理 6 ，$\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}\sim$ N（0，1）

但 $np=300\times0.2=60$，$\sqrt{npq}=\sqrt{300\times0.2\times0.8}=6.93$

∴ $\frac{Y-60}{6.93}\sim$ N（0，1）， 故所求概率为

$P\{Y>60\}=P\{\frac{Y-60}{6.93}>\frac{60-60}{6.93}\}=P\{Y^*>0\}=1-\Phi($

7、解：（1）设 100 个部件中正常工作的部件数为 X ，则 $X\sim b(100,0.9)$

由中心极限定理 6，$\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}\sim$ N（0，1），

但 $np=100\times0.9=90$，$\sqrt{npq}=\sqrt{100\times0.9\times0.1}=3$

∴ $\frac{Y-90}{3}\sim$ N（0，1），

∴整个系统起作用的概率为

$P\{X\geq 85\}=P\{\frac{X-90}{3}\geq\frac{85-90}{3}\}=1-\Phi(-\frac{5}{3})=\Phi(1.67)$

（2） 设有 n 个部件组成的复杂系统，其中能正常工作的有 X 部，则

X $\sim b(n,p)$ 由中心极限定理 6 ，$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\sim$ N（0，1）

∵ $np=n\times0.9=0.9n$，$\sqrt{npq}=\sqrt{n\times0.9\times0.1}=0.3\sqrt{n}$

$\therefore \dfrac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \backsim$ N（0，1），依题意得不等式

$$P\{X \ge n\cdot 80\%\} \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow P\{0.8n \le X < +\infty\} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow P\{\frac{0.8n-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le X^{*} < +\infty\} \ge 0. \quad \Leftrightarrow 1-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.$$

$$\Leftrightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0. \quad 解得\ n \ge 24.35 \qquad 故取\ n \ge 25$$

答：这个系统至少要 25 个部件组成。

8、解：设第一组的第 k 人的测量结果为 X_k， $k=1,2,\cdots,80.$

设第二组的第 k 人的测量结果为 Y_k， $k=1,2,\cdots,80.$

已知 $\mu = E(X_k)=E(Y_k)=5$， $\sigma^2 = D(X_k)=D(Y_k)=0.3 \quad \sigma=\sqrt{0.3}=0.548$

由中心极限定理 4，可得

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}-5}{0.548/\sqrt{80}} = \frac{\overline{X}-5}{0.061} \backsim N（0，1）$$

$$\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y}-5}{0.548/\sqrt{80}} = \frac{\overline{Y}-5}{0.061} \backsim N（0，1）$$

（1） $P\{4.9<\overline{X}<5.1\} = P\{\dfrac{4.9-5}{0.061} < \dfrac{\overline{X}-5}{0.061} < \dfrac{5.1-5}{0.061}\} = P\{-1.63 < \dfrac{\overline{X}-5}{0.061} < 1.63\}$

$= 2\Phi(1.63)-1 = 0.8968$

（2） $\because E(\overline{X}-\overline{Y}) = E(\overline{X})-E(\overline{Y}) = 5-5=0$

$$D(\overline{X}-\overline{Y}) = D(\overline{X})+D(\overline{Y}) = \frac{D(X)}{n}+\frac{D(Y)}{n} = \frac{0.3}{80}+\frac{0.3}{80} = 0.0075$$

$$\sqrt{D(\overline{X}-\overline{Y})} = \sqrt{0.0075} = 0.0866$$

$$\therefore \frac{\overline{X}-\overline{Y}-E(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{D(\overline{X}-\overline{Y})}} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{0.0866} \backsim N（0，1）$$

$$\therefore P\{-0.1<\overline{X}<0.1\} = P\{\frac{-0.1}{0.0866} < \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{0.0866} < \frac{0.1}{0.0866}\}$$

=

$$P\{-1.15 < \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{0.0866} < 1.15\} = \Phi(1.15) - \Phi(-1.15) = 2\Phi(1.15) - 1 = 0.7458$$