第七章　参数估计答案

1、解：总体均值μ，总体方差σ^2的矩法估计值分别为

$$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=\frac{1}{8}[74.001+74.003+\cdots+74.002]=74.002$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{8}[(-0.001)^2+(0.003)^2+\cdots+0^2]=6\times10^{-6}$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2=\frac{8}{7}\times6\times10^{-6}=6.86\times10^{-6}$$

2、解：（1）$\because \mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{c}^{+\infty}x\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^{\theta}\int_{c}^{+\infty}x^{-\theta}dx=\frac{c\theta}{1-\theta}$

解出参数，得$\theta=\frac{\mu_1}{\mu_1-c}$，用样本矩代替总体矩，得

$\hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{\overline{x}-c}$ 是参数θ的矩法估计值；$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$ 是参数θ的矩法估计量。

解：（2）①求 X 的 1 阶原点矩

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}x\sqrt{\theta}e^{\sqrt{\theta}-1}dx=\int_{0}^{1}\sqrt{\theta}e^{\sqrt{\theta}}=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

解之得　$\theta=(\frac{\mu_1}{\mu_1-1})^2$

②用样本矩代替总体矩，得

$\hat{\theta}=(\frac{\overline{x}}{\overline{x}-1})^2$　是参数θ的矩法估计值。

$\hat{\theta}=(\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1})^2$　是参数θ的矩法估计量。

解：（3）①求 X 的 1 阶原点矩

$\mu_1=E(X)=mp$, 解之得　$p=\frac{\mu_1}{m}$

②用样本矩代替总体矩，得

$\hat{p}=\frac{\overline{x}}{m}$　是参数 p 的矩法估计值。

$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$　是参数 p 的矩法估计量。

3、解：（1）∵X $\backsim$ $f(x) = \begin{cases} \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} & x > c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$\therefore X_i \backsim f(x_i) = \begin{cases} \theta c^{\theta} x_i^{-(\theta+1)} & x_i > c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$\therefore L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta c^{\theta} x_i^{-(\theta+1)} = (\theta c^{\theta})^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{-(\theta+1)}$

$\mathrm{Ln}[L(\theta)] = n(\ln\theta + \theta\ln c) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

令 $\frac{d}{d\theta}\{\ln[L(\theta)]\} = n(\frac{1}{\theta} + \ln c) - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$　，并解之得；

$\hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \ln c}$　是参数θ的最大似然估计值。

$\hat{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X - \ln c}$　是参数θ的最大似然估计量。

解：（2）①求似然函数

∵X $\backsim$ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$\therefore Xi \backsim f(x_i) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} & 0 \le x_i < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$\therefore L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \theta^{\frac{n}{2}} (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\sqrt{\theta}-1}$

$\ln L(\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

②求最大似然估计

令 $\frac{\partial}{\partial\theta}\{\ln[L(\theta)]\} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$

解之得 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$ 是参数 θ 的最大似然估计值。

$\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$ 是参数 θ 的最大似然估计量。

解：（3）①求似然函数

∵X $\sim$ $P\{X=x\}=C_m^x p^x(1-p)^{m-x}$

∴Xi $\sim$ $P\{X_i=x_i\}=C_m^{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}$

$$\therefore L(P)=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=(\prod_{i=1}^{n}x_i)\cdot p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln[L(p)]=\ln[\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}]+(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$$

②求最大似然估计

令 $\dfrac{d}{dp}\{\ln[L(P)]\}=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)\cdot\dfrac{1}{p}-(nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)\cdot\dfrac{1}{1-p}=0$

解之得驻点 $p=\dfrac{\bar{x}}{m}$

$\therefore\ \hat{p}=\dfrac{\bar{x}}{m}$ 是参数 p 的最大似然估计值。

$\hat{p}=\dfrac{\bar{X}}{m}$ 是参数 p 的最大似然估计量。

4、解：（1）已知 X $\sim$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$

①求参数 θ 的矩法估计

$\mu_1=E(X)=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=\cdots=3-2\theta$

$\theta=\dfrac{3-\mu_1}{2}$

但 $\mu_1=\bar{X}=\dfrac{1}{3}(1+2+1)=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \hat{\theta}=\dfrac{3-\bar{x}}{2}=\dfrac{3-\frac{4}{3}}{2}=\dfrac{5}{6}$ 是参数θ的矩法估计值。

②求参数θ的最大似然估计

$\because X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$ ； $\therefore$ Xi $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$

$$\therefore L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i=x_i\}=P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2=2\}\cdot P\{X_3=1\}$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$

$$\ln[L(\theta)]=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$$

令$\dfrac{d}{d\theta}\{\ln[L(\theta)]\}=\dfrac{5}{\theta}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$ 解之得：

$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$ 是参数θ的最大似然估计值。

解：（2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体$\pi(\lambda)$的一个样本，求参数λ的最大似然估计和矩法估计。

①求参数λ的最大似然估计

$\because X \sim P\{X=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ ； $\therefore$ Xi $\sim P\{X_i=x_i\}=\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$

$$\therefore L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i)!}$$

$$\ln[L(\lambda)]=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln[\prod_{i=1}^{n}x_i!]$$

令$\dfrac{d}{d\lambda}\{\ln\{L(\lambda)]\}=-n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$ 解之得：

$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是参数λ的最大似然估计值。

$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是参数λ的最大似然估计量。

②求参数λ的 矩法估计

$\because \mu_1 = E(X) = \lambda \qquad \therefore \lambda = \mu_1$

$\therefore \hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 是参数 λ 的矩法估计值。

$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是参数 λ 的矩法估计量。

6、 解：设 X 为一个样品中属于石灰石的石子数，则 X $\sim$ $b(10, p)$

由第 3 题知， p 的最大似然估计值为 $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$. 由本题给的数据，计算得

$\bar{x} = \frac{1}{100}(0\times0+1\times1+2\times6+3\times7+4\times23+5\times26+\cdots+10\times0) = 4.99$ （块）

$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{m} = \frac{4.99}{10} = 0.499$

7、 解：（1）$\because$ X $\sim$ $P\{X=x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ ，由第 4 题得，

$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是参数 λ 的最大似然估计值。

而 $P\{X=0\} = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$

$\therefore \hat{p}\{X=0\} = e^{-\bar{x}}$ 是 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计值。

（2）由所给数据可计算得

$\bar{x} = \frac{1}{122}[44\times0+42\times1+21\times2+9\times3+4\times4+2\times\ldots] = \frac{13\ldots}{12\ldots} = 1.123$

$\hat{p}\{X=0\} = e^{-\bar{x}} = e^{-1.123} = 0.3\ldots$

8、证明：（1）验证两个样本的联合方差 S_W^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计量。

$$\because E(S_W^2) = E\left[\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right] = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}E(S_1^2) + \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}E(S_2^2)$$

$$= \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}D(X) + \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}D(X) = D(X) = \sigma^2$$

∴ S_w^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计量。

（2）验证 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ 是总体均值 μ 的无偏估计值。

$$\because E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right]=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sum_{i=1}^{n} a_i E(X)=\frac{\mu}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sum_{i=1}^{n} a_i=\mu$$

∴ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ 是总体均值 μ 的无偏估计值。

9、解：（1） $E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=c\sum_{i=1}^{n} E[(X_{i+1}-X_i)^2]$

$$=c\sum_{i=1}^{n}\{D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2\}$$

$$=c\sum_{i=1}^{n}[D(X)+D(X)]+[E(X)-E(X)]^2\}$$

$$=c\sum_{i=1}^{n}\{\sigma^2+\sigma^2\}=2c(n-1)\sigma^2$$

若 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计，则需 $2c(n-1)\sigma^2=\sigma^2$

于是得 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$

（2） $E[(\overline{X})^2-cS^2]=E[(\overline{X})^2]-cE[S^2]=\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\}-cD(X)$

$$=\frac{1}{n}D(X)+[E(X)]^2-cD(X)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-c\sigma^2$$

若 $(\overline{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计，则需 $\dfrac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-c\sigma^2=\mu^2$

于是得 $c=\dfrac{1}{n}$

10、解：$\because X_1, X_2, X_3, X_4$ 服从均值为θ的指数分布，

$\therefore E(X_i)=\theta$；　$D(X_i)=\theta^2 \qquad i=1,2,3,4.$

（1）$E(T_1)=\frac{1}{6}[E(X_1)+E(X_2)]+\frac{1}{3}[E(X_3)+E(X_4)]=\frac{1}{6}[\theta+\theta]+\frac{1}{3}[\theta+\theta]=\theta$

$E(T_2)=\frac{1}{5}[E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4)]=\frac{1}{5}[\theta+2\theta+3\theta+4\theta]=2\theta$

$E(T_3)=\cdots=\theta$

$\therefore T_1, T_3$ 是θ的无偏估计量；T_2不是。

（2）$D(T_1)=\frac{1}{36}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[E(X_3)+E(X_4)]=\cdots=\frac{5}{18}\theta^2$

$D(T_3)=\frac{1}{25}[D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)+16D(X_4)]=\cdots=\frac{1}{4}\theta^2$

$\because D(T_3)<D(T_1)$　；　$\therefore T_3$ 比 T_1 有效。

11、解：（1）已知$\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计，$\therefore E(\hat{\theta})=\theta$

$\because E[(\hat{\theta})^2]=D(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})]^2=D(\hat{\theta})+\theta^2$

$\therefore$当$D(\hat{\theta})>0$　时，$E[(\hat{\theta})^2]\neq\theta^2$

故当$D(\hat{\theta})>0$　时，$\hat{\theta}^2$ 不是θ^2的无偏估计。

（2）已知 X $\sim$ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta} & 0\le x<\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　$\theta>0$，θ为参数

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本，由例 6 得，

$\hat{\theta}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$是参数$\theta$的最大似然估计量。

$\hat{\theta}=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是参数$\theta$的最大似然估计值。

下面证明$\hat{\theta}=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$不是参数$\theta$的无偏估计值。

由 100 页得$\hat{\theta}$的分布函数是$F_{\hat{\theta}}(x)=[F_X(x)]^n$

$$\because F_X(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ \dfrac{x}{\theta} & 0\le x<\theta\\ 1 & \theta\le x<+\infty\end{cases}$$

$$\therefore F_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ (\dfrac{x}{\theta})^n & 0\le x<\theta\\ 1 & \theta\le x<+\infty\end{cases}\Rightarrow f_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1} & 0\le x\le\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\therefore E(\hat\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat\theta}(x)dx=\int_0^\theta x\frac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

故$\hat\theta=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$不是参数$\theta$的无偏估计。

12、解：（1）$\because E(\overline{X}_1)=\mu$，$E(\overline{X}_2)=\mu$

$\therefore$ 对于任意的常数a,b．$(a+b=1)$，都有

$$E(Y)=E(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=aE(\overline{X}_1)+bE(\overline{X}_2)=a\mu+b\mu=a\mu+(1-a)\mu=\mu$$

$\therefore$ 对于任意的常数a,b，$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是参数μ的无偏估计量。

（2）确定常数$a,b.$使 D(Y)达到最小值。

$$D(Y)=D(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=a^2D(\overline{X}_1)+b^2D(\overline{X}_2)=a^2\frac{D(X)}{n_1}+b^2\frac{D(X)}{n_2}$$

$$=(\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2})\sigma^2=[\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}]\cdot\sigma^2$$ 是a的函数。

令 $\dfrac{d}{da}[D(Y)]=[\dfrac{2a}{n_1}-\dfrac{2(1-a)}{n_2}]\sigma^2=0$

解之得，$a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 为惟一驻点，必是极值点。

故当$a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$b=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$时，D（Y）有最小值。

14、解：

$\langle 1\rangle$已知:$\sigma=0.6$(时)用正态分布求μ的0. 95置信区间

$$\overline{X}=\frac{1}{9}(6.0+5.7+5.8+6.5+7.9+6.3+5.6+6.1+5.0)=6$$

由$1-\alpha=0.95$， 则$\alpha=0.05$， $\frac{\alpha}{2}=0.025$

$\therefore Z_{0.025}=1.96$

$$\therefore \overline{X}-Z_{0.05}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{n}}=6-1.96\times\frac{0.6}{\sqrt{9}}=5.608$$

$$\overline{X}+Z_{0.05}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{n}}=6+1.96\times\frac{0.6}{\sqrt{9}}=6.392$$

$\therefore \mu$的0.95置信区间为(5. 608， 6. 392)

(2)未知σ， 用t分布求μ的0.95置信区间

$\overline{X}=6.$

$$S^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{8}[(6.0-6)^2+(5.7-6)^2+(5.8-6)^2+\cdots\cdots+(5.0-6)^2]=0.33$$

$$S=\sqrt{0.33}=0.5745$$

由$1-\alpha=0.95$， $\alpha=0.05$， $\frac{\alpha}{2}=0.025$， $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$

$$\therefore \overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=6-2.306\times\frac{0.5745}{\sqrt{9}}=5.558$$

$$\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=6+2.306\times\frac{0.5745}{\sqrt{9}}=6.442$$

故μ的0. 95置信区间为(5. 558， 6. 442)

16、解：(下一页)

已知n=9， S=11， $S^2=121$

由$1-\alpha=0.95$， $\alpha=0.05$， $\frac{\alpha}{2}=0.025$

由$p\left\{\chi^2(n-1)>\lambda_1\right\}=1-\frac{\alpha}{2}=0.975$， 查得$\lambda_1=\chi^2_{0.975}(8)=2.180$

由$p\left\{\chi^2(n-1)>\lambda_2\right\}=\frac{\alpha}{2}=0.025$， 查得$\lambda_2=\chi^2_{0.025}(8)=17.535$

$$\frac{(n-1)S^2}{\lambda_2}=\frac{8\times121}{17.535}=55.2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\lambda_1}=\frac{8\times121}{2.180}=444.0$$

$\therefore\sigma^2$的0.95置信区间为(55.2， 444.0)

σ是0.95置信区间为(7.4， 21.1)

24、解：已知$n=12$， $\overline{X}=\frac{1}{12}[40+34+\cdots+39]=35.4$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{11}[(40-35.4)^2+\cdots+(39-35.4)^2]=52.265$$

S =7.23

$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(11)=1.7959$

$$\therefore\overline{X}+t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=35.4+1.7959\times\frac{7.23}{\sqrt{12}}=39.15\text{ （岁）}$$

答：发现者平均年龄的 0.95 置信上限为 39.15 岁。