第三章　多维随机变量及其分布

1　在一箱子中有12个开关，其中2只是次品，在其中取两次每次任取一只，考虑两种试验：（1）放回抽样；（2）不放回抽样。我们定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & 若第一次取出的是正品\\ 1, & 若第一次取出的是次品\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & 若第二次取出的是正品\\ 1, & 若第二次取出的是次品\end{cases}$$

试分别就（1）、（2）两种情况，写出 X 与 Y 的联合分布律。

2　盒子里有 3 只黑球，2 只红球，2 只白球。在其中任取 4 只球，以 X 表示取到黑球的只数，Y 表示取到红球的只数，求（X，Y）的联合分布列。

3　设随机变量（X，Y）概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y) & 0<x<2,\ 2<y<\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（1）求常数 k.　　　　；　　　（2）求 P{X<1,Y<3}

（3）求 P{X<1.5}　　　；　　　（4）求 P{X+Y≤4}

4　将一枚硬币抛三次，以 X 表示前两次出现正面的次数，以 Y 表示三次中出现正面的次数，求（X，Y）的联合分布律及边缘分布律。

6　已知二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<x<y\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求边缘概率密度。

7　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（1）试确定常数 c ；（2）求边缘概率密度。

8　将某一医药公司 9 月份和 8 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y，　据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

Y / X	51	52	53	54	55	P{Y=j}
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01	0.18
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01	0.15

53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05	0.35
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03	0.12
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03	0.20
P{X=i}	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13	1.00

11　在第 7 题中（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$，特别,写出当Y=$\frac{1}{2}$时X的条件概率密度；（2）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，特别,写出当X=$\frac{1}{3}$, X=$\frac{1}{2}$时Y 的条件概率密度；（3）求条件概率 $P\{Y\geq\frac{1}{4}\big|X=\frac{1}{2}\}$，$P\{Y\geq\frac{3}{4}\big|X=\frac{1}{2}\}$

12　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,\ 0<x< \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$　，　$f_{X|Y}(x|y)$

13　（1）问第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立？（2）问第 12 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立？（需说明理由）

14　设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，1）上服从均匀分布，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0 \\ 0 & y\leq 0\end{cases}$，

（1）求 X 和 Y 的联合概率密度；

（2）设含有 a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$ ，试求 a 有实根的概率。

15　进行打靶，设弹着点 A（X，Y）的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 N（0，1）分布，规定点 A 落在区域 $D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq 1\}$ 得 2 分；点 A 落在区域 $D_2=\{(x,y)\big|1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ 得 1 分；点 A 落在区域 $D_3=\{(x,y)\big|x^2+y^2\geq 4\}$ 得 0 分 ，以 Z 记打靶的得分，写出 X，Y 的联合概率密度，并求 Z 的分布律。

16　设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0\end{cases}\ ;\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y} & y>0 \\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

其中$\lambda > 0$， $\mu > 0$是常数，引入随机变量$Z = \begin{cases} 1 & 当X \le Y \\ 0 & 当X>Y \end{cases}$

（1）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ ；（2）求 Z 的分布律和分布函数。

17　设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \\ 0 & 其它 \end{cases} \quad ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求随机变量 Z=X+Y 的概率密度。

18　某种产品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & t > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

设各周的需要量是相互独立的，求（1）两周，（2）三周的需要量的概率密度。

19　设（X，Y）的概率密度是 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

（1）问 X 和 Y 是否独立？
（2）求 Z=X+Y 的概率密度。

21　设随机变量（X，Y）的概率密度是

$$f(x,y) = \begin{cases} be^{-(x+y)} & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

（1）试确定常数b；

（2）求边缘密度函数 $f_X(x)$， $f_Y(y)$.

（3）求函数$U = \max(X, Y)$ 的分布函数。

26　设 X 和 Y 相互独立，X ∽ $\pi(\lambda_1)$ ； Y ∽ $\pi(\lambda_2)$ 　证明：

Z=X+Y ∽ $\pi(\lambda_1 + \lambda_2)$