第四章　随机变量的数字特征

2　某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次，每次随机地取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 E（X）。

5　设在某一时间间隔里，某电器设备用于最大负荷的时间 X（以分计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1500^2}x & 0\le x\le 1500\\ \frac{-1}{1500^2}(x-3000), & 1500<x\le 3000\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

6　设随机变量的分布律为

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0.4 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$$

求 E（X），E（X^2），E（$3X^2+5$）

7　设随机变量的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）$Y=2X$ ；（2）$Y=e^{-2X}$ 的数学期望

8　设（X，Y）的分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

（1）求 E（X），E（Y）；（2） 设 $Z=\frac{Y}{X}$ ， 求 E（Z）；（3）设 Z=$(X-Y)^2$，求 E（Z）。

9　设随机变量（X，Y）的 联合概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 E（X），E（Y），E（XY），E（X^2+Y^2）

10　一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年记）服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在出售一年之内损坏可予以调换，若工厂售出一台设备赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元，试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望。

12　设电压（以 V 计）X：$N(0,9)$，将电压施加于一检波器，其输出电压为 $Y=5X^2$，求输出电压 Y 的均值。

13　设随机变量 X_1、X_2 的概率密度是

$$f_{X_1}(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases};\quad f_{X_2}(x)=\begin{cases}4e^{-4x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求（1）$E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1 与 X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$.

14　将 n 只球（1—n 号）随机地放进 n 只盒子（1—n 号）中去，一只盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记 X 为总的配对数，求 E（X）。

15　若有 n .把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁。用它们去试开门上的锁。设取到每只钥匙是等可能的，若每把钥匙试开一次后除去。试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望。

16　设 X 为随机变量，C 是常数，证明：$D(X)<E\{[X-C]^2\}$，对于 $C\neq$ E（X）时恒成立。（由于 D（X）=E{[X-E（X）]^2}），上式表明，当 C=E（X）时，E{[X-E（X）]^2} 取到最小值。

17　设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$ 为常数，求 E（X），D（X）

20　设长方形的高（以 m 计）$X:U(0,2)$，已知长方形的周长（以 m 计）为 20，求长方形面积 A 的数学期望和方差。

22　5 家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量（以公斤计）分别为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 已知 $X_1 \sim N(200,225), X_2 \sim N(240,240)$，$X_3 \sim N(180,225)$，$X_4 \sim N(260,265), X_5 \sim N(320,270)$，$X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$. 相互独立。

（1）求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差；

（2）商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库至少储存多少公斤该产品？

23　卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X（以公斤计）服从 $N(50,2.5^2)$，问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

24　设二维随机变量（X，Y）的 联合概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的。

26　设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，并定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生}\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生}\end{cases};\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生}\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生}\end{cases}$$

证明：若 $\rho_{XY}=0$，则X和Y必定相互独立。

27　设二维随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,\ 0<x<\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$Cov(X,Y)$。

28　设二维随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y) & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$Cov(X,Y)$，ρ_{XY}，$D(X+Y)$.

29　设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$；$Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，且设 X，Y 相互独立，试求：

$Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数。（其中 α,β 是不为 0 的常数）

30 （1）设 $w=(aX+3Y)^2$ ，且 $E(X)=E(Y)=0$， $D(X)=4$， $D(Y)=16$

$\rho_{XY}=-0.5$ ，求常数 a ，使 $E(w)$ 为最小，并求 $E(w)$ 的最小值。

（2）设（X，Y） 服从二维正态分布，且有 D(X)=σ_X^2 ； D(Y)=σ_Y^2

证明当 $a^2=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 时，$W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立

32 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700，利用契比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200—9400 之间的概率 p.

33 对于两个随机变量 V，W， 若 $E(V^2)$， $E(W^2)$ 均存在，证明：

$$[E(VW)]^2\le E(V^2)\cdot E(W^2)$$

这一不等式称为柯西—施瓦兹不等式。