第七章　参数估计

1　随机地取 8 只活塞杯，测得它们的直径为（以 mm 计）

74.001　74.005　74.003　74.001　74.000　73.998　74.006　74.002

试求总体均值 μ 及方差 σ^2 的矩估计值，并求样本方差 S^2.

2　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本值，求下列总体的分布密度或分布列中的未知参数的矩法估计。

（1）$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} & x>c \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　其中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$，θ 为参数。

（2）X $\sim$ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} & 0 \le x<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　其中 $\theta>0$ 为未知参数。

（3）X $\sim$ $P\{X=x\}=C_m^x p^x(1-p)^{m-x}$　$x=0,1,\cdots,m.$　$0<p<1$，

P 为未知参数。

3 （同上面第 2 题）设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是相应样本值，求下列各题中分布参数的最大似然估计。

（1）$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} & x>c \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　其中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$，θ 为参数。

（2）X $\sim$ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} & 0 \le x<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　其中 $\theta>0$ 为未知参数。

（3）X $\sim$ $P\{X=x\}=C_m^x p^x(1-p)^{m-x}$　$x=0,1,\cdots,m.$　$0<p<1$，

P 为未知参数。

4 （1）　设总体 X 具有分布律

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2\end{pmatrix}$$

其中 θ（$0<\theta<1$），已知取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$，试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

（2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $\pi(\lambda)$ 的一个样本，求参数 λ 的最大似然估

计和矩法估计。

6　一地质学家为研究密歇根湖湖滩地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立，并且由过去经验知，它们都服从参数为 n=10，p 的二项分布。p 是这地区一块石子是石灰石的概率，求 p 的最大似然估计值。该地质学家所得的数据如下：

样品中属石灰石的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

7 （1）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，且 $X \sim \pi(\lambda)$ ，求 P{X=0}的最大似然估计。

（2）某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的的严重事故的次数服从泊松分布,求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的最大似然估计.使用下面 122 个观察值.下表中,r 表示一扳员某五年中引起起严重事故的次数,s 表示观察到的扳道员人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

8 （1）验证第六章§2 定理四中的统计量

$$S_W^2 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_1^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_2^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

是两总体公共方差 σ^2 的无偏估计量（ S_W^2 称为 σ^2 的合并估计）；

（2）设总体 X 的数学期望为 μ， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本， $a_1, \cdots, a_n$.

是任意常数，验证： $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ 是 μ 的无偏估计量。（ $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ ）

9　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，设 $E(X) = \mu$， $D(X) = \sigma^2$

（1）确定常数 c ,使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

（2）确定常数 c，使 $(\overline{X})^2 - cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计。（ $\overline{X}, S^2$ 是样本均值和样本方差。

10　设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中 θ 未知，设有统计量

$$T_1 = \frac{1}{6}(X_1 + X_2) + \frac{1}{3}(X_3 + X_4) \quad ;$$

$$T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{5}$$

$$T_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

（1）指出 T_1、T_2、T_3 中哪几个是 θ 的无偏估计量；（2）在上述 θ 的无偏估计量中指出哪一个较为有效。

11　（1）设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，且有 $D(\hat{\theta}) > 0$，试证：$\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计；（2）试证明均匀分布

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & 0 \le x < \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad \theta > 0, \theta \text{ 为参数}$$

中未知参数 θ 的最大似然估计量不是无偏的。

12　设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中，分别抽取容量为 n_1, n_2 的两独立样本，$\overline{X}_1, \overline{X}_2$ 分别是两样本的样本均值，试证：对于任意的常数 $a, b.\ (a + b = 1)$ $Y = a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2$ 都是参数 μ 的无偏估计量，并确定常数 $a, b.$ 使 D(Y)达到最小值。

14　设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（以小时计）分别为：

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

（1）若由以往经验知 $\sigma = 0.6$（小时）；（2）若 σ 未知。

16　随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差 s=11(m/s)，设炮口速度服从正态分布。求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

24　科学上的重大发现往往是由年轻人作出的，下面列出了自 16 世纪中叶至 20 世纪早期的十二项重大发现的发现者和他们发现时的年龄。

序号	发　　现	发现者	发现时间	年龄
1	地球绕太阳运转	哥白尼	1543 年	40
2	望远镜、天文学的基本定律	伽俐略	1600 年	34

3	运动原理、重力、微积分	牛　顿	1665年	23
4	电的本质	富兰克林	1746年	40
5	燃烧是与氧气联系着的	拉瓦锡	1774年	31
6	地球是渐进过程演化成的	莱　尔	1830年	33
7	自然选择控制演化的证据	达尔文	1858年	49
8	光的场方程	麦克斯威尔	1864年	33
9	放射性	居　里	1896年	34
10	量子论	普朗尼	1901年	43
11	狭义相对论，$E=mc^2$	爱因斯坦	1905年	26
12	量子论的数学基础	薛定谔	1926年	39

设样本来自正态总体，试求发现时发现者的平均年龄μ的0.95的单侧置信上限。