第三章

填空题

1. X 与 Y 相互独立,且均服从 N（0，σ^2）,则(X,Y)的分布密度 $f(x,y)=$_______.

2. (X,Y) 在区域 G: $0\le x\le 1, x^2\le y\le x$ 上服从均匀分布，则其分布密度 $f(x,y)=$_____.

3. 设(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.56	0.24
1	0.14	0.06

则 $p_{2,1}=$________. $p_2=$________， $p\left\{X\le\frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2}\right\}=$________. $P\{X\ge 1\}=$________，$P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=$________.

4．二维随机变量(X,Y)的概率为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|<1,|y|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

则关于 X 与 Y 的边缘分布 $f_X(x)=$_______, $f_Y(y)$=_______, 以及条件分布 $f_{X|Y}(x|y)=$________.

5．$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), x>0, y>0\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$ 则分布密度函数 $f(x,y)=$________.

选择题

1．设(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	b
1	a	$\frac{1}{4}$

已知事件{X=0}与事件{X+Y=1}相互独立，则 a,b 的值是(　).

(A) $a=\frac{1}{6}$ ，$b=\frac{1}{3}$.

(B) $a=\frac{3}{8}$，$b=\frac{1}{8}$

(C) $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{6}$　　　　(D) $a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{1}{10}$

综合题

2．离散型随机变量(X,Y)的概率分布如下表所示，试求边缘分布，并问 X 与 Y 是否相互独立？

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6
0	0.202	0.174	0.113	0.062	0.049	0.023	0.04
1	0	0.099	0.064	0.040	0.031	0.020	0.006
2	0	0	0.031	0.025	0.018	0.013	0.008
3	0	0	0	0.001	0.002	0.004	0.011

3．设(X，Y)为连续型二维随机变量，其联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kx(x-y), 0<x<2, -x<y<x \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

试求：(1)常数 k；(2)边缘密度函数；(3)问 X 与 Y 是否相互独立？

4．设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，X 服从[0，2]上均匀分布，Y 服从参数为 2 的指数分布，试求 p(Y≤X).

10．设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从[0，1]上均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，求 Z＝X+Y 的概率密度函数.

11．设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从标准正态分布 N(0，1)，试求 p($Y\geq\sqrt{3}X$).

12．箱子里装有 a 件正品和 b 件次品，依次从箱子中任取一件，取两次，每次取后不放回，随机变量 X 和 Y 如下定义：

$$X=\begin{cases}1, & \text{如果第一次取出的是次品}\\ 0, & \text{如果第一次取出的是正品}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{如果第一次取出的是次品}\\ 0, & \text{如果第二次取出的是正品}\end{cases}$$

试写出随机向量(X,Y)的联合分布律、边缘分布律，并问 X 与 Y 是否相互独立？

13．设 X 与 Y 相互独立，都服从[0，1]上的均匀分布，求 Z＝$|X-Y|$的分布.

14．随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从参数为 1 的指数分布，求 $z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度.

第三章答案

1．$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$

2．$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\in G\end{cases}$

3．0.14，0.30，0.56，0.2，0.70

4．$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$　　　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{2},|x|<1,|y|<1$$

5．$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

6．B

7．X 的边缘分布律：

P(X=0)=0.627，P(X=1)=0.260，P(X=2)=0.095，P(X=3)=0.018

Y 的边缘分布律：

P(Y=0)=0.202，P(Y=1)=0.273，P(Y=2)=0.208，P(Y=3)=0.128，P(Y=4)=0.100，P(Y=5)=0.060, P(Y=6)=0.029

由于 P(X=3，Y=0)=0≠P(X=3)P(Y=0)=0.018×0.202

所以 X 与 Y 不相互独立

8.（1）$k=\frac{1}{8}$，（2）$p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^3, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{y}{4}+\frac{y^3}{48}, & 0<y\le 2\\ \frac{1}{3}-\frac{y}{4}+\frac{5y^3}{48}, & -2\le y\le 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(3) X 与 Y 不相互独立

9. $p\{Y\le X\}=\frac{1}{4}(3+e^{-4})$

10. $p_z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-z}, & 0\le z\le 1\\ e^{-z}(e-1) & z\ge 1\end{cases}$

11. $p(Y\ge\sqrt{3}X)=\frac{1}{2}$

12.(X，Y)的联合分布律：

$p\{X=0,Y=0\}=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}$

$p\{X=0,Y=1\}=\frac{a}{a+b}\times\frac{b}{a+b-1}$

$p\{X=1,Y=0\}=\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}$

$p\{X=1,Y=1\}=\frac{b}{a+b}\times\frac{b-1}{a+b-1}$

X 的边缘分布为：

$p(X=0)=\frac{a}{a+b}$，$p(X=1)=\frac{b}{a+b}$

Y 的边缘分布为：

$p(Y=0)=\frac{a}{a+b}$，$p(Y=1)=\frac{b}{a+b}$

X 与 Y 不相互独立.

13． $p_z(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0 \le z \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

14． $p_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$