习题四

1.设随机变量X的分布列为$p_k=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$，求$X$的数学期望与方差.

2.设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}a+2(1-a)x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中$0\le a\le 2$，求数学期望$E(X)$的最大值和最小值.

3.一台设备由三大部件构成，在设备运转中部件需要调整的概率分布为 0.12，0.20，0.25，假设各部件的状态相互独立，以X表示同时需要调整的部件数，求X的数学期望$E(X)$和方差$D(X)$.

4.一批零件中有 9 件合格品与 3 件次品，往机器上安装时任取一件，若取到次品就弃置一边.求在取到合格品之前已取到的次品数的期望与方差.

5.设随机变量X服从参数为$\lambda=1$的指数分布，试求$E(\max\{X,2\})$与$E(\min\{X,2\})$.

6.设随机变量X服从参数为λ的 Poisson 分布，且$E[(X-1)(X-2)\}=1$，试求λ的值.

7.设随机变量$X\sim N(0,1)$，试求$E(|X|)$、$D(|X|)$.

8.设$X\sim U[0,2\pi]$，计算$E(\sin X)$.

9.设X的概率密度函数为$p(x)$，且常数c满足：对任意的$x>0$，$p(x+c)=p(c-x)$，又$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx$收敛，则$E(X)=c$.

10.现有n个袋子，各装有a只白球b只黑球.先从第一个袋中摸出一球，记下颜色后把它放入第二个袋中，再从第二个袋中摸出一球，记下颜色后放入第三个袋中，照此办法依次摸下去，最后从第n个袋中摸出一球，记下颜色.若在这n次摸球中所摸出的白球个数为S_n，试求$E(S_n)$.

11.设市场对某商品的需求量X（单位：吨）是一个服从[2，4]上的均匀分布的随机变量.每销售一吨商品可赚 3 万元，但若销售不出去每吨浪费 1 万元.问应组织多少货源才能取得最大收益？

12. 设随机变量 X 的密度函数 $p(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，已知 $E(X)=0.5$，$D(X)=0.15$，求常数a,b,c.

13.设随机变量θ服从均匀分布$U[0,2\pi]$， $X=\cos\theta, Y=\cos(\theta+a)$，其中$a$为常数，试讨论$X$与$Y$的关系.

14.设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求相关系数$\rho(X,Y)$.

15. 设二维随机向量 (X,Y) 有满足 $D(X)=3$， $D(Y)=1$， $Cov(X,Y)=-1$， 记$U=-2X+Y$，$V=6X-3Y$，求相关系数$\rho(U,V)$.

16.设有甲、乙两种证券，其收益率分别为随机变量Y_1与Y_2，他们的数学期望分别为μ_1与μ_2，标准差（代表风险）分别为σ_1与σ_2，相关系数为ρ.若把资金x_1投入甲证券，x_2投入乙证券，组成一个证券投资组合，$x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，且$x_1+x_2=1$.试求该投资组合的平均收益和方差，并求使得组合风险最小的一种证券组合.

17.设随机变量X与Y的数学期望分别为-2和2，方差分别为 1 和 4，X与Y的相关系数为 0.5，根据切比雪夫不等式估计概率$P\{|X+Y|\geq 6\}$.