习题五

5.1 利用辛钦大数定律证明伯努利大数定律.

5.2 设随机变量 X 的 k 阶矩 $\alpha_k = \mathbf{E}X^k\,(k>0)$ 存在，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立与 X 同分布随机变量，试证明，

$$\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k = \alpha_k .$$

5.3 假设随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 两两独立并且同分布，$\mathbf{E}X_i = \mu$，$\mathbf{D}X_i = \sigma^2$ 存在，证明 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的算术平均值 $\overline{X}_n$ 依概率收敛于（各个变量共同的）数学期望 μ：

$$\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \mu .$$

5.4 设随机变量 X 在区间 $(-1,2)$ 上服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立与 X 同分布随机变量，试证明，

$$\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 = 1 .$$

5.5 假设天平无系统误差. 将一质量为 10 g 的物品重复进行称量，证明当称量次数无限增大时，称量结果的算术平均值依概率收敛于 10 g.

5.6 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立与 X 同分布随机变量，试证明，

5.7 设随机变量 X 服从参数为 (m, p) 的二项分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立与 X 同分布随机变量，求极限

$$\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 .$$

5.8 假设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同服从参数为 2 的指数分布，证明当 n 充分大时，$S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 近似服从正态分布 $N(\mu_n, \sigma_n^2)$，并通过前 4 阶矩表示 μ_n 和 σ_n^2.

5.9 一包装工平均三分钟完成一件包装. 假设实际完成一件包装所用时间服从指数分布，试利用中心极限定理，求完成 100 件包装的总时间需要 5 h 到 6 h 的概率的近似值.
装的总时间需要 5 到 6 h 的概率的近似等于 0.4772.

5.10 用自动包装机包装的味精，每袋净重 X 是一个随机变量. 假设要求每袋的平均重量为 100g，标准差为 2g. 如果每箱装 100 袋，试求随意查验的一箱净重超过 10050g 的概率 α.

5.11 将一枚均匀对称的硬币掷 10000 次，求正面恰好出现 5000 次的概率 α 的近似值.

5.12 一计算机有 150 个终端，每个终端在一个小时之内平均有 6 min 使用打印机，假

设各终端使用打印机与否相互独立，求至少有20台打印机同时使用的概率α.

5.13 以往春季商品交易会上，某企业在所接待的客户中下定单的客户占30%．假定今年下定单的比率不变，试求在所接待的90个客户中，

(1) 恰好有27个客户下定单的概率α；

(2) 有15~30个客户下定单的概率β.

5.14 假设批量生产的某产品的优质品率为60%，求在随机抽取的200件产品中有120到150件优质品的概率α.

5.15 在某地区抽样调查残疾人比率p．问至少需要调查多少人，才能以不小于$1-\alpha$的概率使被调查人中残疾人的比率对p的绝对偏差不大于1%．分别取$\alpha=0.05$和$\alpha=0.10$；假设，(1) p=3.1%；(2) $p\leq 5\%$.

(2) 当$p\leq 0.05$时，对于$\alpha=0.05$和$\alpha=0.10$，由附表3得$u_{0.05}$=1.96和$u_{0.10}$=1.6449；由式（*）并注意到$pq\leq 0.25$，对于$\alpha=0.05$和$\alpha=0.10$，分别有

$$n_1\geq 0.05\times 0.95\left(\frac{1.96}{0.01}\right)^2\approx 1825\geq pq\left(\frac{1.96}{0.01}\right)^2;$$

$$n_2\geq 0.05\times 0.95\left(\frac{1.6449}{0.01}\right)^2\approx 1286\geq pq\left(\frac{1.6449}{0.01}\right)^2,$$

即这时相应地至少需要调查1825人和1286人.

5.16 假设根据统计资料，男孩出生率为0.515，女孩的出生率为0.485，试根据棣莫弗–拉普拉斯定理，求在10000个新生婴儿中男孩不多于女孩的概率Q的近似值.

5.17 根据孟德尔遗传律[①]，红、黄两种番茄杂交的第二代结红果植株与结黄果的植株的比例为3:1．假设种植杂交种400株，试求黄果植株在83到117之间的概率α的近似值.

① 孟德尔（G.J.Mendel，1822—1884）奥地利遗传学家.