习题六

6.1 假设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，试求来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布.

6.2 假设总体 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，试求来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布.

6.3 假设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，试求来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布.

6.4 假设总体 X 服从参数为 p 的几何分布，试求来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率分布.

6.6 某地区根据在高中男生中抽样调查的结果，得如下身高的数据：

身　高（厘米）	150~160	160~170	170~180	180~190	合　计
人　　　　数	5	36	44	15	100

求样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2 的近似值.

6.7 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的随机样本，$\overline{X}_n$ 和 S_n^2 相应为容量为 n 的样本的样本均值和样本方差；X_{n+1} 是与 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 独立的又一观测值，$\overline{X}_{n+1}$ 和 S_{n+1}^2 相应为基于容量为 $n+1$ 的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1})$ 的样本均值和样本方差．证明

(1) $\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n + \dfrac{1}{n+1}(X_{n+1} - \overline{X}_n)$；

(2) $S_{n+1}^2 = \dfrac{n}{n+1}\left[S_n^2 + \dfrac{1}{n+1}(X_{n+1} - \overline{X}_n)^2\right]$.

6.8 设总体 X 服从参数 p=0.20 为的 0-1 分布，$\overline{X}_n$ 是样本均值，基于来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本．试求满足 $\mathbf{E}(\overline{X}_n - p)^2 < 0.01$ 的容量为 n.

6.9 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 4)$，由来自总体 X 的简单随机样本得样本均值 $\overline{X}$．试分别求满足下列各关系式的最小样本容量 n：

(1) $\mathbf{D}\overline{X} \le 0.10$；　　　(2) $\mathbf{E}\left|\overline{X} - \mu\right| \le 0.10$.

(3) $\mathbf{P}\left\{\left|\overline{X} - \mu\right| \le 0.10\right\} \ge 0.95$；

6.10 设总体 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(30, 3^2)$，而 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是总体 X 和 Y 的样本均值，样本容量相应为 20 和 30．试求概率 $\mathbf{P}\left\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 0.4\right\}$.

6.11 假设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 是两个样本均值，基于来自同一正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的两个相互独立且容量相同的简单随机样本．试求满足 $\mathbf{P}\left\{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right| > \sigma\right\} = 0.06$ 的样本容量 n 的近似值.

6.12 设 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立同服从标准正态分布，$\overline{X}$ 是算术平均值，求 $4\overline{X}^2$ 的概率分布分布.

6.13 设总体 $X \sim N(a, 2)$，$Y \sim N(b, 2)$ 并且独立；基于分别来自总体 X 和 Y 的容量相

应为m和n的简单随机样本，得样本方差S_x^2和S_y^2，求统计量

$$T=\frac{1}{2}\left[(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2\right]$$

的概率分布.

6.14 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本;而$\overline{X}$和S分别为样本均值和样本标准差．求使下列不等式成立的最小的样本容量n：

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 1.5\right\}\ge 0.95\,.$$

服从自由度为 2 的t分布。