习题七

7.1 假设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，对于任意实数 α，证明 $\mathbf{E}[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2]$ 是 λ 的无偏估计量.

7.2 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布；$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自 X 的简单随机样本，求 λ^2 的无偏估计量.

7.3 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，统计量

$$D = k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

是总体方差 σ^2 的无偏估计量，求常数 k .

7.4 设总体 X 服从区间 $[0, \theta]$ 上的均匀分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自 X 的简单随机样本，

(1) 求未知参数 θ 的最大似然估计量；

(2) 假如所得估计量是有偏估计量，将其修正为无偏估计量.

7.5 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 若 0<x<1,\\ 0 \quad ,若不然.\end{cases}$$

试根据来自 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，求未知参数 θ 的最大似然估计量.

7.6 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本，总体 X 的概率密度为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}，若 x \geq \theta，\\ 0 \quad ，若 x<\theta；\end{cases}$$

试求未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\Theta}_1$ 和矩估计量 $\hat{\Theta}_2$.

7.7 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}，若 x>1，\\ 0 \quad ，若 x \leq 1.\end{cases}$$

其中参数 $\beta>1$. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求

(1) 未知参数 β 的矩估计量；

(2) 未知参数 β 的最大似然估计量.

7.8 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha^2}{x^2}，x>\alpha，\\ 0 \ ，x \leq \alpha.\end{cases}$$

其中$\alpha > 0$．设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的简单随机样本，求未知参数α的最大似然估计量.

7.9 为观察一种橡胶制品的耐磨性，从这种产品中各随意抽取了5件，测得如下数据：185.82，175.10，217.30，213.86，198.40．假设产品的耐磨性$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求μ和σ^2的无偏估计值.

7.10 对某种袋装食品的质量管理标准规定：每袋平均重500克，标准差10克．现在从一商店的一批这种袋装食品中随意抽取了14袋，测量每袋的重量，得如下数据：500.90，490.01，501.63，500.73，515.87，511.85，498.39，514.23，487.96，525.01，509.37，509.43，488.46，497.15．假设这种袋装食品每袋的重量X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$．试利用μ和σ的0.95置信区间，说明抽查结果是否表明这一批袋装食品每袋平均重μ和标准差σ符合标准.

7.11 设批量生产的某种配件的内径服从正态分布律，根据随机抽查的16只配件测得平均内径3.05毫米，标准差0.16毫米，试求这种配件的平均内径及其标准差的0.95置信区间.

7.12 称量的标准差是天平精度的重要特征，假设称量结果服从正态分布．为检验一天平的精度，将同一砝码在天平上重复称量了12次，得如下数据：10.0126，10.0243，10.001，9.9941，9.9873，9.9854，10.0019，9.9716，9.9959，10.0193，10.0044，9.9949．试建立标准差的0.95置信区间.

7.13 以往的统计资料表明，新旧两种工艺下生产的同一种产品的抗拉强度X和Y都服从正态分布，其标准差相应为$\sigma_x = \sqrt{30}$和$\sigma_y = \sqrt{52}$．假设分别抽样检验了新旧产品各10件和13件，得相应的样本均值44和38，试建立两种产品期望抗拉强度a和b之差的0.95置信区间.

7.14 一商店销售分别来自甲、乙两个厂家的同一种产品，为比较其性能的差异，分别从两家的产品中各随意抽取了8件和9件，测定某项性能指标，得平均值0.190和0.232，标准差为 0.078 和 0.087．假设两厂产品此项指标的测定结果 X 和Y都服从正态分布：$X \sim N(a, \sigma_1^2), Y \sim N(b, \sigma_2^2)$．试求方差比$\sigma_1^2 / \sigma_2^2$以及均值差$a-b$的0.95置信区间；对结果作出解释.

7.15 为观察某药对高胆固醇血症的疗效，测定了五名患者服药前和服药一个疗程后的血清胆固醇含量，得如下数据：

患 者 №	1	2	3	4	5
服 药 前	313	255	290	328	281
服 药 后	301	250	271	320	271

假设化验结果服从正态分布律．试建立服药前后均值差的0.95置信区间，并对所得结果作出解释.

7.16 假设湖中总共有N条鱼，其中N是未知数．现在在湖中捕了M=1000条鱼，全部做上标记后又放回湖中．然后又捕了m=200条鱼，结果其中有标记的r=5条．试估计湖中鱼的条数N.

7.17 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本，

(1) 求随机变量 $2\lambda n\overline{X}$ 的概率分布，其中 $\overline{X}$ 是样本均值；

(2) 求未知参数 λ 的 $1-\alpha$ 置信区间.